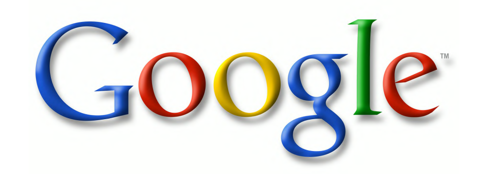
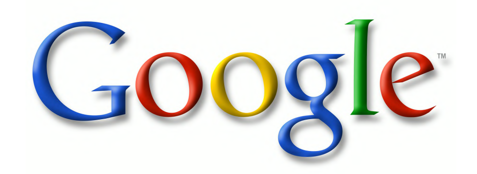

Google


Google

Alexander Ziwet

Über die Anwendbarkeit kombinatorischer Methoden zur Reduktion von Problemen der Hydrodynamik, Elektrodynamik und der magnetischen Induktion.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doctorgrades

der

Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig

vorgelegt

von

Arthur Korn.

Berlin.
Druck von G. Bernstein.
1890.

Inhalts-Verzeichnis.

Durch eine zuerst von Murphy*) angegebene kombinatorische Methode kann man das Problem der Elektricitätsverteilung auf beliebig vielen Konduktoren auf die einfacheren Probleme der elektrischen Verteilung auf den einzelnen Konduktoren reducieren. Ähnliche kombinatorische Wege sind schon bei einigen speciellen Problemen der Hydrodynamik und der magnetischen Induction eingeschlagen worden; so bei dem Problem der Bewegung zweier starrer Kugeln in einer inkompressibeln unbegrenzten Flüssigkeit**), so bei dem Problem der magnetischen Induktion für zwei magnetische Kugeln***). In allen Fällen ist der Beweis der Anwendbarkeit solcher Methoden durch unmittelbare Rechnung etwas mühsam, und es muss überdies für jeden einzelnen Fall ein specieller Beweis angegeben werden.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist nun, auf Grund allgemeiner Untersuchungen die Anwendbarkeit kombinatorischer Methoden auf Probleme der Hydrodynamik, Elektrodynamik und der magnetischen Induktion in möglichster Allgemeinheit festzustellen.

Da die zu dem Beweise der Murphy'schen Methode nötigen Schlussweisen auch bei diesen Untersuchungen eine wichtige Rolle spielen, so sei es mir gestattet, im I. Abschnitt dieser Arbeit den Beweis jener

---

*) Murphy, *elementary principles of the theories of electricity, heat and molecular actions*, P. I, p. 93 ff. Vgl. Lipschitz, Unters. über die Anwendung eines Abbildungsprinc. a. d. Theorie d. Verteilung d. Elektricität, Crelle Bd. 61, p. 12. C. Neumann, Unters. über das log. und Newt. Potential, p. 310 ff.

**) G. Kirchhoff, Mechanik, Vorl. 18, p. 228—29.
C. Neumann, Hydronamische Untersuchungen, p. 165 ff.

***) ibid. p. 318 ff.

Methode in einer Form zu entwickeln, deren Abweichungen von der von C. Neumann*) angegebenen Beweisform nicht principieller Natur, nur durch eine Anpassung an die folgenden Teile der Arbeit bedingt sind. Im II. und III. Abschnitt folgen die entsprechenden Untersuchungen für die Probleme der Hydrodynamik (Elektrodynamik) und der magnetischen Induktion.

*) C. Neumann, Unters. über das log. und Newt. Potential, p. 313 ff.

I. Abschnitt.

Über eine kombinatorische Methode zur Reduktion elektrostatischer Probleme.

Unter „Potentialfunktion eines Raumgebietes $\mathfrak{A}$“ versteht man eine Function φ der rechtwinkligen Koordinaten xyz, die innerhalb dieses Raumes mit ihren Differentialquotienten nach x, y, z eindeutig und stetig ist, der Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

genügt und an der Grenze des Gebietes stetig ist und irgend welche vorgeschriebenen Grenzbedingungen erfüllt.

Erstreckt sich das Gebiet $\mathfrak{A}$ ins Unendliche, so soll — diese Festsetzung treffen wir für alles Folgende — die daselbst stattfindende Grenzbedingung aussagen, dass im Unendlichen φ in solcher Weise zu Null konvergiert, dass das Produkt:

$$\varphi r,$$

in dem r die Entfernung des Punktes (xyz) von irgend einem im Endlichen gelegenen Punkte vorstellt, mit wachsendem r einer endlichen Konstanten M zustrebt.

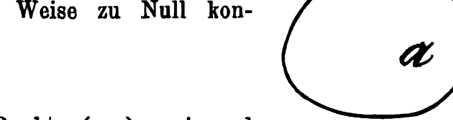


Fig. 1.

Wir werden uns in diesem Abschnitt auf folgende Sätze stützen, die wir der allgemeinen Theorie der Potentialfunktionen entnehmen:

Ia. Die Potentialfunktion eines Gebietes $\mathfrak{A}$ ist zugleich Potentialfunktion eines engeren Gebietes.

Ib. Die Summe von Potentialfunktionen eines Gebietes $\mathfrak{A}$ ist wieder eine Potentialfunktion von $\mathfrak{A}$.

Ic. Sind G und K resp. die Maximal- und Minimalwerte einer Potentialfunktion φ des Gebietes $\mathfrak{A}$ am Rande desselben, so sind 2 Fälle möglich:

1. Es ist $G = K$; dann ist überall innerhalb des Gebietes $\mathfrak{A}$:

$$\varphi = \text{const.} = G = K.$$

2. Es ist $G \neq K$; dann ist überall innerhalb des Gebietes $\mathfrak{A}$:

1) $$K < \varphi < G,$$

das Zeichen $<$ im strengen Sinne genommen, sobald der Punkt (xyz), auf den sich φ bezieht, durch irgend welche Entfernung vom Rande getrennt ist*).

Eine unmittelbare Folge des Satzes Ic. ist der nachstehende

Zusatz: Zerlegen wir den Raum durch eine geschlossene Fläche α in 2 Gebiete S_α und T_α, von denen das letztere ins Unendliche reicht, so wird eine Potentialfunktion U_α des Gebietes S_α, die an der Fläche α überall den Wert 1 besitzt, überall innerhalb α den Wert 1 besitzen. Für eine Potentialfunktion U_α des Gebietes T_α, die an der Fläche α überall den Wert 1 besitzt, wird in Erstreckung des ganzen Gebietes T_α

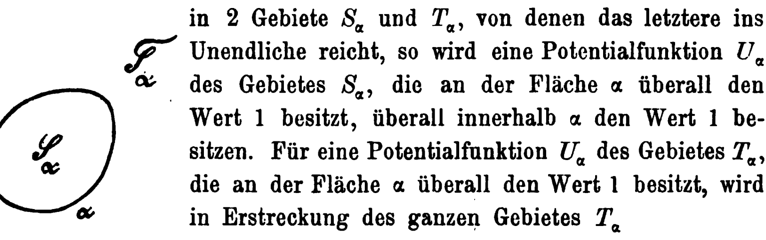


Fig. 2.

$$0 \leqq U_\alpha < 1$$

sein, das Zeichen $<$ im strengen Sinne genommen, sobald der Punkt, auf den sich U_α bezieht, durch irgend welche Entfernung von der Fläche α getrennt ist.

In der That, für U_α ist im ersten Falle:

$$G = K = 1 \text{ (an der Fläche } \alpha),$$

somit: $$U_\alpha = 1 \text{ innerhalb } S_\alpha \text{ (nach Ic.)};$$

für U_α ist im zweiten Falle:

$$G = 1 \text{ (an der Fläche } \alpha),$$
$$K = 0 \text{ (im Unendlichen)},$$

somit: $$0 < U_\alpha < 1 \text{ innerhalb } T_\alpha \text{ (nach Ic.)},$$

die Zeichen $<$ im strengen Sinne genommen, sobald der Punkt, auf den sich U_α bezieht, durch irgend welche Entfernung von der Fläche α getrennt ist und nicht im Unendlichen liegt. Da im Unendlichen $U_\alpha = 0$

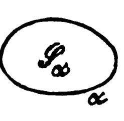
*) Ia. und Ib. sind unmittelbar evident; den Beweis von Ic., s. in C. Neumann's Unts. über d. log. und Newt. Potential p. 33.

ist, so kann man die letztere Bedingung weglassen, wenn man die letzte Ungleichung in der Form:

$$0 \overline{\gtrless} U_\alpha < 1$$

schreibt; damit ist der Zusatz bewiesen.

Befindet sich im Raume T_α eine geschlossene Fläche β, die von α völlig getrennt ist und α nicht umschliesst, so wird nach dem Zusatz zu I c. die Potentialfunktion U_α des Gebietes T_α, die an der Fläche α überall den Wert 1 besitzt, im Raume T_α, somit auch an der Fläche β der Bedingung genügen:



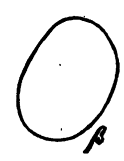


Fig. 3.

$$0 \overline{\gtrless} U_\alpha < 1.$$

Das Maximum von U_α an der Fläche β ist ein echter Bruch:

$$0 \overline{\gtrless} \operatorname{Max} U_{\alpha\beta} < 1.$$

Der zweite untere Index in $U_{\alpha\beta}$ soll — diese Bezeichnung werden wir immer anwenden — anzeigen, dass wir es mit Werten von U_α an der Fläche β zu thun haben; der erste untere Index soll nur daran erinnern, dass U an der Fläche α eine gewisse Bedingung erfüllt.

Die angegebene Bedingung wird offenbar auch stattfinden, wenn die Fläche β die Fläche α umschliesst, im Übrigen aber von ihr völlig getrennt ist.

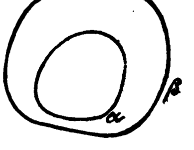
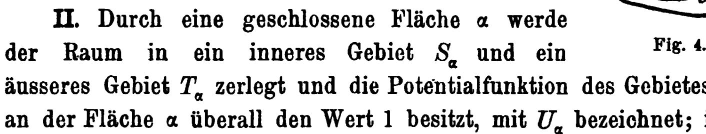


Fig. 4.

Wir können diese beiden Resultate in der folgenden Form aussprechen:

II. Durch eine geschlossene Fläche α werde der Raum in ein inneres Gebiet S_α und ein äusseres Gebiet T_α zerlegt und die Potentialfunktion des Gebietes T_α, die an der Fläche α überall den Wert 1 besitzt, mit U_α bezeichnet; ist nun β eine geschlossene, im Gebiete T_α liegende, von α völlig getrennte Fläche, und definieren wir:



2) $$\varkappa_\alpha^\beta = \operatorname{Max} U_{\alpha\beta}$$

als die Situationskonstante der Fläche α in Bezug auf die Fläche β, so können wir von dieser Situationskonstanten aussagen, dass sie ein positiver echter Bruch ist.

Wir können fortfahren:

II'. Durch die Fläche β wird der Raum in 2 Gebiete zerlegt, von denen wir das Gebiet, in welchem α liegt, mit T_β bezeichnen; ist nun

U_β die Potentialfunktion des Gebietes T_β, die an der Fläche β überall den Wert 1 besitzt, und definieren wir:

2') $$\varkappa_\beta^\alpha = \text{Max}\, U_{\beta\alpha}$$

als die Situationskonstante der Fläche β in Bezug auf die Fläche α, so können wir von dieser Situationskonstanten aussagen, dass sie

ein echter Bruch ist,

falls α von β nicht umschlossen wird, dass sie

$= 1$ ist,

falls α von β umschlossen wird.

In der That, wenn α von β nicht umschlossen wird, so ist überall innerhalb T_β:

$$0 \overline{\gtrless} U_\beta < 1 \text{ (nach Zusatz zu Ic.)},$$

somit auch: $$0 \overline{\gtrless} \text{Max}\, U_{\beta\alpha} < 1.$$

Wird dagegen α von β umschlossen, so ist überall innerhalb T_β:

$$U_\beta = 1 \text{ (nach Zusatz zu Ic.)},$$

somit auch: $$\text{Max}\, U_{\beta\alpha} = 1.$$

Wir trennen nun die folgenden Betrachtungen für die beiden Fälle: a) dass α von β nicht umschlossen wird und b) dass α von β umschlossen wird.

a) α werde von β nicht umschlossen.

Wir betrachten eine Potentialfunktion Φ_α des Gebietes T_α, deren Werte an der Fläche α zwischen den Grenzen K_α und G_α liegen, so dass:

a) $$K_\alpha \overline{\gtrless} \Phi_{\alpha\alpha} \overline{\gtrless} G_\alpha.$$

Bezeichnen wir mit L_α die grösste der 4 Zahlen:

$$+K_\alpha,\quad -K_\alpha,\quad +G_\alpha,\quad -G_\alpha,$$

so ist um so mehr:

b) $$-L_\alpha \overline{\gtrless} \Phi_{\alpha\alpha} \overline{\gtrless} +L_\alpha,\quad (L_\alpha \overline{\gtrless} 0).$$

Diese Ungleichung können wir, da $U_{\alpha\alpha} = 1$ ist, auch so schreiben:

c) $$\begin{cases} \Phi_{\alpha\alpha} - L_\alpha U_{\alpha\alpha} \overline{\gtrless} 0, \\ \Phi_{\alpha\alpha} + L_\alpha U_{\alpha\alpha} \overline{\gtrless} 0. \end{cases}$$

Nach Satz Ib. können wir

$$(\Phi_\alpha - L_\alpha U_\alpha) \text{ und } (\Phi_\alpha + L_\alpha U_\alpha)$$

als Potentialfunktionen des Gebietes T_α ansehen und aus den mit c) äquivalenten Formeln:

d) $$\begin{cases}[\Phi_\alpha - L_\alpha U_\alpha]_\alpha \overline{\overline{<}} 0,\\ [\Phi_\alpha + L_\alpha U_\alpha]_\alpha \overline{\overline{>}} 0,\end{cases}$$

mit Hilfe des Satzes Ic. die Folgerung ziehen:

Es ist im ganzen Gebiet T_α:

e) $$\begin{cases}\Phi_\alpha - L_\alpha U_\alpha \overline{\overline{<}} 0,\\ \Phi_\alpha + L_\alpha U_\alpha \overline{\overline{>}} 0,\end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix}\Phi_\alpha \overline{\overline{<}} L_\alpha U_\alpha,\\ \Phi_\alpha \overline{\overline{>}} -L_\alpha U_\alpha.\end{matrix}$$

Im Besonderen ist an der Fläche β:

f) $$-L_\alpha U_{\alpha\beta} \overline{\overline{<}} \Phi_{\alpha\beta} \overline{\overline{<}} L_\alpha U_{\alpha\beta},$$

um so mehr, da $L_\alpha \overline{\overline{>}} 0$ ist:

g) $$-L_\alpha \operatorname{Max} U_{\alpha\beta} \overline{\overline{<}} \Phi_{\alpha\beta} \overline{\overline{<}} L_\alpha \operatorname{Max} U_{\alpha\beta}$$

Diese Formel können wir nach 2) so schreiben:

3) $$-L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta \overline{\overline{<}} \Phi_{\alpha\beta} \overline{\overline{<}} L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta,$$

und wir erhalten den Satz:

IIIa. Liegen die Werte einer Potentialfunktion Φ_α des Gebietes T_α an der Fläche α zwischen den Grenzen $(-L_\alpha)$ und $(+L_\alpha)$, wo $L_\alpha \overline{\overline{>}} 0$ ist, so liegen die Werte, die diese Potentialfunktion an der Fläche β hat, zwischen den Grenzen:

$$(-L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta) \text{ und } (+L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta),$$

wo $\varkappa_\alpha^\beta$ die durch 2) definierte Situationskonstante der Fläche α in Bezug auf die Fläche β vorstellt.

In genau derselben Weise folgt:

IIIa'. Liegen die Werte einer Potentialfunktion Φ_β des Gebietes T_β an der Fläche β zwischen den Grenzen:

$$(-L_\beta) \text{ und } (+L_\beta), \ (L_\beta \overline{\overline{>}} 0),$$

so liegen die Werte dieser Potentialfunktion an der Fläche α zwischen den Grenzen

$$(-L_\beta \varkappa_\beta^\alpha) \text{ und } (+L_\beta \varkappa_\beta^\alpha),$$

wo $\varkappa_\beta^\alpha$ die durch 2') definierte Situationskonstante der Fläche β in Bezug auf die Fläche α vorstellt.

Bemerkung*). Nach II. und II'. ist sowohl $\varkappa_\alpha^\beta$ als auch $\varkappa_\beta^\alpha$ ein echter Bruch, da α von β in unserem Falle nicht umschlossen wird. Bezeichnen wir mit

---

*) Während die Sätze IIIa. und IIIa'. mit demselben Wortlaut für den Fall gelten, dass α von β umschlossen wird, ist diese „Bemerkung" auf jenen Fall nicht auszudehnen.

3′) $\varkappa_{\alpha\beta}$ die grössere der Konstanten $\varkappa_{\alpha}^{\beta}$ und $\varkappa_{\beta}^{\alpha}$,

so ist auch $\varkappa_{\alpha\beta}$ ein echter Bruch. Wir werden $\varkappa_{\alpha\beta}$ kurz die Situationskonstante der beiden Flächen $\alpha\beta$ nennen.

Aus den Sätzen IIIa. und IIIa′. ergiebt sich nun, wie sogleich gezeigt werden soll, der Beweis einer kombinatorischen Methode, welche die Lösung der Aufgabe:

„Eine Potentialfunktion $\varphi_{\alpha+\beta}$ des ausserhalb der Flächen $\alpha\beta$ liegenden Gebietes $T_{\alpha+\beta}$ zu finden, deren Werte $\varphi_{\alpha+\beta,\alpha}$ und $\varphi_{\alpha+\beta,\beta}$ an den Flächen α und β vorgeschrieben sind,"

unmittelbar angiebt, sobald die beiden Aufgaben

„Eine Potentialfunktion Φ_{α} des Gebietes T_{α} zu finden, deren Werte $\Phi_{\alpha\alpha}$ an der Fläche α vorgeschrieben sind,"

und:

„Eine Potentialfunktion Φ_{β} des Gebietes T_{β} zu finden, deren Werte $\Phi_{\beta\beta}$ an der Fläche β vorgeschrieben sind,"

ihre Lösung gefunden haben.

Die Methode lautet:

IVa. Man berechne successive die Potentialfunktionen:

4a)

des Gebietes T_{α}:	des Gebietes T_{β}:
$\overset{1}{\varphi}_{\alpha}$, so dass $\overset{1}{\varphi}_{\alpha\alpha} = \varphi_{\alpha+\beta,\alpha}$ *),	$\overset{1}{\varphi}_{\beta}$, so dass $\overset{1}{\varphi}_{\beta\beta} = \varphi_{\alpha+\beta,\beta}$,
$\overset{2}{\varphi}_{\alpha}$, „ „ $\overset{2}{\varphi}_{\alpha\alpha} = -\overset{1}{\varphi}_{\beta\alpha}$,	$\overset{2}{\varphi}_{\beta}$, „ „ $\overset{2}{\varphi}_{\beta\beta} = -\overset{1}{\varphi}_{\alpha\beta}$,
$\overset{3}{\varphi}_{\alpha}$, „ „ $\overset{3}{\varphi}_{\alpha\alpha} = -\overset{2}{\varphi}_{\beta\alpha}$,	$\overset{3}{\varphi}_{\beta}$, „ „ $\overset{3}{\varphi}_{\beta\beta} = -\overset{2}{\varphi}_{\alpha\beta}$,
— — — — — — — — —	— — — — — — — — —
$\overset{\sigma}{\varphi}_{\alpha}$, „ „ $\overset{\sigma}{\varphi}_{\alpha\alpha} = -\overset{\sigma-1}{\varphi}_{\beta\alpha}$,	$\overset{\sigma}{\varphi}_{\beta}$, „ „ $\overset{\sigma}{\varphi}_{\beta\beta} = -\overset{\sigma-1}{\varphi}_{\alpha\beta}$,
— — — — — — — — —	— — — — — — — — —
in inf.	in inf.

dann stellt die unbedingt konvergente Reihe

$$4a') \qquad \varphi_{\alpha+\beta} = \sum_{0}^{\infty}{}_{i}\,(\overset{i}{\varphi}_{\alpha} + \overset{i}{\varphi}_{\beta})$$

die Potentialfunktion des Gebietes $T_{\alpha+\beta}$ dar, die an der Fläche α die Werte $\varphi_{\alpha+\beta,\alpha}$, an der Fläche β die Werte $\varphi_{\alpha+\beta,\beta}$ besitzt.

*) Wir nehmen die Werte $\varphi_{\alpha+\beta,\alpha}$, $\varphi_{\alpha+\beta,\beta}$ so gegeben an, dass die Funktionen $\overset{\sigma}{\varphi}_{\alpha}\overset{\sigma}{\varphi}_{\beta}$ wirklich existieren.

Beweis. Der Beweis zerfällt in 2 Teile, einmal in den Konvergenzbeweis der Reihe 4a'), andererseits in den Beweis der in IVa. inbetreff der Funktion $\varphi_{\alpha+\beta}$ behaupteten Eigenschaften.

Es seien $(+L_\alpha)$ und $(-L_\alpha)$, $\left\{L_\alpha \gtreqless 0\right\}$, die Grenzen von $\varphi_{\alpha+\beta,\alpha}$, $(+L_\beta)$ und $(-L_\beta)$, $\left\{L_\beta \gtreqless 0\right\}$, die Grenzen von $\varphi_{\alpha+\beta,\beta}$, dann folgt durch fortgesetzte Anwendung der Sätze IIIa., IIIa'., Ic. und unter Berücksichtigung der „Bemerkung" zu den Sätzen IIIa., IIIa': Es ist:

4a'')

innerhalb T_α:	innerhalb T_β:
$-L_\alpha \overline{\overline{<}} \varphi_\alpha^1 \overline{\overline{<}} +L_\alpha$,	$-L_\beta \overline{\overline{<}} \varphi_\beta^1 \overline{\overline{<}} +L_\beta$,
$-L_\beta \varkappa_{\alpha\beta} \overline{\overline{<}} \varphi_\alpha^2 \overline{\overline{<}} +L_\beta \varkappa_{\alpha\beta}$,	$-L_\alpha \varkappa_{\alpha\beta} \overline{\overline{<}} \varphi_\beta^2 \overline{\overline{<}} +L_\alpha \varkappa_{\alpha\beta}$,
$-L_\alpha \varkappa_{\alpha\beta}^2 \overline{\overline{<}} \varphi_\alpha^3 \overline{\overline{<}} +L_\alpha \varkappa_{\alpha\beta}^2$,	$-L_\beta \varkappa_{\alpha\beta}^2 \overline{\overline{<}} \varphi_\beta^3 \overline{\overline{<}} +L_\beta \varkappa_{\alpha\beta}^2$,
— — — — — — — — — —	— — — — — — — — — —
$-L_\beta \varkappa_{\alpha\beta}^{2\sigma-1} \overline{\overline{<}} \varphi_\alpha^{2\sigma} \overline{\overline{<}} +L_\beta \varkappa_{\alpha\beta}^{2\sigma-1}$,	$-L_\alpha \varkappa_{\alpha\beta}^{2\sigma-1} \overline{\overline{<}} \varphi_\beta^{2\sigma} \overline{\overline{<}} +L_\alpha \varkappa_{\alpha\beta}^{2\sigma-1}$,
$-L_\alpha \varkappa_{\alpha\beta}^{2\sigma} \overline{\overline{<}} \varphi_\alpha^{2\sigma+1} \overline{\overline{<}} +L_\alpha \varkappa_{\alpha\beta}^{2\sigma}$,	$-L_\beta \varkappa_{\alpha\beta}^{2\sigma} \overline{\overline{<}} \varphi_\beta^{2\sigma+1} \overline{\overline{<}} +L_\beta \varkappa_{\alpha\beta}^{2\sigma}$,
— — — — — — — — — —	— — — — — — — — — —
in inf.	in inf.

Aus diesen Formeln geht hervor, dass jedes Glied:

$$\varphi_\alpha^i + \varphi_\beta^i \text{ der Reihe 4a')}$$

absolut genommen

$$\overline{\overline{<}} (L_\alpha + L_\beta)\varkappa_{\alpha\beta}^i \text{ ist,}$$

also kleiner oder gleich dem entsprechenden Gliede der geometrischen Reihe:

$$(L_\alpha + L_\beta)\left\{1 + \varkappa_{\alpha\beta} + \varkappa_{\alpha\beta}^2 + \cdots\right\}.$$

Da nun $\varkappa_{\alpha\beta}$ ein echter Bruch ist (vgl. die „Bemerkung" zu den Sätzen IIIa. und IIIa'.), so folgt hieraus, dass die Reihe 4a') unbedingt konvergent ist.

Wir gehen nun zu dem 2. Teile des Beweises über. Die Funktionen φ_α^i, φ_β^i sind resp. Potentialfunktionen der Gebiete T_α und T_β, sie sind nach Ia. auch Potentialfunktionen des beiden Gebieten gemeinsamen Teiles $T_{\alpha+\beta}$, und es folgt nach Satz Ib., dass $\varphi_{\alpha+\beta}$ eine Potentialfunktion des Gebietes $T_{\alpha+\beta}$ ist. Dass $\varphi_{\alpha+\beta}$ an den Flächen α, β die Werte $\varphi_{\alpha+\beta,\beta}$ und $\varphi_{\alpha+\beta,\beta}$ besitzt, folgt durch Addition der Formeln 4a) links und rechts. Es ergiebt sich nämlich:

$$4a''')\left\{\begin{aligned}\sum_0^\infty{}_i\,\varphi^i_{\alpha\alpha} &= \varphi_{\alpha+\beta,\alpha} - \sum_0^\infty{}_i\,\varphi^i_{\beta\alpha},\\ \sum_0^\infty{}_i\,\varphi^i_{\beta\beta} &= \varphi_{\alpha+\beta,\beta} - \sum_0^\infty{}_i\,\varphi^i_{\alpha\beta},\end{aligned}\right.$$

und diese Formeln können wir nach 4a′) auch so schreiben:

$$4a'''')\left\{\begin{aligned}[\varphi_{\alpha+\beta}]_\alpha &= \varphi_{\alpha+\beta,\alpha},\\ [\varphi_{\alpha+\beta}]_\beta &= \varphi_{\alpha+\beta,\beta}.\end{aligned}\right.$$

Dies war zu beweisen.

b) Die Fläche α wird von der Fläche β umschlossen.

Gehen wir die Schlüsse, die uns zu den Sätzen IIIa. und IIIa′. führten, noch eiumal durch, so werden wir erkennen, dass dieselben ganz unabhängig sind von der Voraussetzung, nach welcher α nicht von β umschlossen wird; sie gelten in genau derselben Weise, wenn α von β umschlossen wird:

IIIb. Die Sätze IIIa. und IIIa′. gelten mit demselben Wortlaut, wenn die Fläche α von der Fläche β umschlossen wird.

An diesen Satz schliessen wir die folgende

Bemerkung. Die Situationskonstante $\varkappa^\beta_\alpha$ bleibt (Satz II.) nach wie vor ein echter Bruch; dagegen ist $\varkappa^\alpha_\beta = 1$ (nach Satz II′.).

Der Beweis des folgenden Satzes:

IVb. Die Methode IVa., gilt mit demselben Wortlaut, wenn die Fläche α von der Fläche β umschlossen wird,

wird nun mit dem Beweise von IVa. völlig identisch sein, mit dem einen Unterschiede, dass sich der Konvergenzbeweis der für $\varphi_{\alpha+\beta}$ aufgestellten Reihe nicht auf die Formeln 4a″), sondern auf die folgenden stützen wird. Es ist:

$$4b'')\left\{\begin{array}{lll|lll}
 & \text{innerhalb } T_\alpha: & & & \text{innerhalb } T_\beta: & \\
-L_\alpha & \leqq \varphi^1_\alpha & \leqq +L_\alpha, & -L_\beta & \leqq \varphi^1_\beta & \leqq +L_\beta,\\
-L_\beta & \leqq \varphi^2_\alpha & \leqq +L_\beta, & -L_\alpha\varkappa^\beta_\alpha & \leqq \varphi^2_\beta & \leqq +L_\alpha\varkappa^\beta_\alpha,\\
-L_\alpha\varkappa^\beta_\alpha & \leqq \varphi^3_\alpha & \leqq +L_\alpha\varkappa^\beta_\alpha, & -L_\beta\varkappa^\beta_\alpha & \leqq \varphi^3_\beta & \leqq +L_\beta\varkappa^\beta_\alpha,\\
-L_\beta\varkappa^\beta_\alpha & \leqq \varphi^4_\alpha & \leqq +L_\beta\varkappa^\beta_\alpha, & -L_\alpha(\varkappa^\beta_\alpha)^2 & \leqq \varphi^4_\beta & \leqq +L_\alpha(\varkappa^\beta_\alpha)^2,\\
\hdashline
-L_\beta(\varkappa^\beta_\alpha)^{\sigma-1} & \leqq \varphi^{2\sigma}_\alpha & \leqq +L_\beta(\varkappa^\beta_\alpha)^{\sigma-1}, & -L_\alpha(\varkappa^\beta_\alpha)^{\sigma} & \leqq \varphi^{2\sigma}_\beta & \leqq +L_\alpha(\varkappa^\beta_\alpha)^{\sigma},\\
-L_\alpha(\varkappa^\beta_\alpha)^{\sigma} & \leqq \varphi^{2\sigma+1}_\alpha & \leqq +L_\alpha(\varkappa^\beta_\alpha)^{\sigma}, & -L_\beta(\varkappa^\beta_\alpha)^{\sigma} & \leqq \varphi^{2\sigma+1}_\beta & \leqq +L_\beta(\varkappa^\beta_\alpha)^{\sigma},\\
\hdashline
 & \text{in inf.} & & & \text{in inf.} &
\end{array}\right.$$

wie sich durch fortgesetzte Anwendung der Sätze IIIb., I. unter Berücksichtigung der Bemerkung zu IIIb. ergiebt. Aus diesen Formeln geht hervor, dass jedes Glied: $\varphi_\alpha^{2\sigma} + \varphi_\beta^{2\sigma}$ sowohl, als auch jedes Glied: $\varphi_\alpha^{2\sigma+1} + \varphi_\beta^{2\sigma+1}$ der Reihe 4a') absolut genommen $\overline{\overline{<}}(L_\alpha + L_\beta)(\varkappa_\alpha^\beta)^{\sigma-1}$ ist, dass die Glieder der Reihe 4a') somit absolut genommen resp. kleiner (gleich) sind als die Glieder der Reihe:

$$(L_\alpha + L_\beta)\left\{1 + 1 + 1 + \varkappa_\alpha^\beta + \varkappa_\alpha^\beta + (\varkappa_\alpha^\beta)^2 + (\varkappa_\alpha^\beta)^2 + (\varkappa_\alpha^\beta)^3 + (\varkappa_\alpha^\beta)^3 + \cdots\right\}.$$

Da $\varkappa_\alpha^\beta$ ein echter Bruch ist, so konvergiert diese Reihe unbedingt, somit gilt Gleiches für die Reihe 4a') und dies war zu beweisen.

Man kann nun die Methode IVa. resp. IVb. zur Lösung des allgemeinen Problems anwenden:

> die Potentialfunktion eines Gebietes zu bestimmen, das von beliebig vielen getrennten geschlossenen Flächen begrenzt wird, an welchen für jene Funktion die Grenzwerte vorgeschrieben sind,

sobald die entsprechenden Probleme für jede einzelne der Begrenzungsflächen gelöst sind.

Man braucht nur mit Hilfe der Methode IVa. oder IVb. das Problem zunächst für 2 Begrenzungsflächen zu lösen, darauf dieselbe Methode auf den Komplex dieser beiden Flächen und eine dritte der Begrenzungsflächen anzuwenden u. s. f., bis die Lösung für den Komplex aller Begrenzungsflächen gefunden ist.

Wir werden indessen die Methode IVa. hier nur in einer speciellen Form auf den allgemeinen Fall von n geschlossenen getrennten Begrenzungsflächen ausdehnen, in welcher auch die analogen Sätze im II. und III. Abschnitt auftreten werden.

V. Es seien $\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n$ n getrennte geschlossene Flächen, von denen keine von irgend einer der übrigen Flächen umschlossen wird. Durch jede der Flächen $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ wird der Raum in 2 Gebiete geteilt, von denen wir die äusseren (ins Unendliche reichenden) Gebiete mit $T_{\alpha_1} \ldots T_{\alpha_n}$ bezeichnen. Sind dann $f_1\,f_2 \ldots f_n$*) gegebene Funktionen der Stelle an den Flächen $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ und berechnet man die Potentialfunktionen:

---

*) Wir nehmen die $f_1 \ldots f_n$ in solcher Weise an, dass die unten auftretenden Funktionen $\varphi_{\alpha_i}^\sigma$ wirklich existieren.

5)

für das Gebiet T_{α_1}:

$\varphi^1_{\alpha_1}$, so dass $\varphi^1_{\alpha_1\alpha_1} = f_1$,

$\varphi^2_{\alpha_1}$, „ „ $\varphi^2_{\alpha_1\alpha_1} = -\left(\varphi^1_{\alpha_2\alpha_1} + \varphi^1_{\alpha_3\alpha_1} + \cdots + \varphi^1_{\alpha_n\alpha_1}\right)$,

$\varphi^3_{\alpha_1}$, „ „ $\varphi^3_{\alpha_1\alpha_1} = -\left(\varphi^2_{\alpha_2\alpha_1} + \varphi^2_{\alpha_3\alpha_1} + \cdots + \varphi^2_{\alpha_n\alpha_1}\right)$,

— — — — — — — — — — — —

$\varphi^\sigma_{\alpha_1}$, „ „ $\varphi^\sigma_{\alpha_1\alpha_1} = -\left(\varphi^{\sigma-1}_{\alpha_2\alpha_1} + \varphi^{\sigma-1}_{\alpha_3\alpha_1} + \cdots + \varphi^{\sigma-1}_{\alpha_n\alpha_1}\right)$,

— — — — — — — — — — — —

in inf.

für das Gebiet T_{α_2}:

$\varphi^1_{\alpha_2}$, so dass $\varphi^1_{\alpha_2\alpha_2} = f_2$,

$\varphi^2_{\alpha_2}$, „ „ $\varphi^2_{\alpha_2\alpha_2} = -\left(\varphi^1_{\alpha_1\alpha_2} + \varphi^1_{\alpha_3\alpha_2} + \cdots + \varphi^1_{\alpha_n\alpha_2}\right)$,

$\varphi^3_{\alpha_2}$, „ „ $\varphi^3_{\alpha_2\alpha_2} = -\left(\varphi^2_{\alpha_1\alpha_2} + \varphi^2_{\alpha_3\alpha_2} + \cdots + \varphi^2_{\alpha_n\alpha_2}\right)$,

— — — — — — — — — — — —

$\varphi^\sigma_{\alpha_2}$, „ „ $\varphi^\sigma_{\alpha_2\alpha_2} = -\left(\varphi^{\sigma-1}_{\alpha_1\alpha_2} + \varphi^{\sigma-1}_{\alpha_3\alpha_2} + \cdots + \varphi^{\sigma-1}_{\alpha_n\alpha_2}\right)$,

— — — — — — — — — — — —

in inf.

— — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — —

für das Gebiet T_{α_n}:

$\varphi^1_{\alpha_n}$, so dass $\varphi^1_{\alpha_n\alpha_n} = f_n$,

$\varphi^2_{\alpha_n}$, „ „ $\varphi^2_{\alpha_n\alpha_n} = -\left(\varphi^1_{\alpha_1\alpha_n} + \varphi^1_{\alpha_2\alpha_n} + \cdots + \varphi^1_{\alpha_{n-1}\alpha_n}\right)$,

$\varphi^3_{\alpha_n}$, „ „ $\varphi^3_{\alpha_n\alpha_n} = -\left(\varphi^2_{\alpha_1\alpha_n} + \varphi^2_{\alpha_2\alpha_n} + \cdots + \varphi^2_{\alpha_{n-1}\alpha_n}\right)$,

— — — — — — — — — — — —

$\varphi^\sigma_{\alpha_n}$, „ „ $\varphi^\sigma_{\alpha_n\alpha_n} = -\left(\varphi^{\sigma-1}_{\alpha_1\alpha_n} + \varphi^{\sigma-1}_{\alpha_2\alpha_n} + \cdots + \varphi^{\sigma-1}_{\alpha_{n-1}\alpha_n}\right)$,

— — — — — — — — — — — —

in inf.

dann stellt die Reihe:

$$5')\qquad \varphi = \sum_{0}^{\infty} {}^{i} \sum_{1}^{n} {}^{\lambda} \varphi^{i}_{\alpha_\lambda}$$

die Potentialfunktion des ausserhalb der Flächen $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ liegenden Gebietes $T_{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$ dar, welche an den Flächen $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ resp. die Werte $f_1 f_2 \ldots f_n$ besitzt. Der Satz gilt unter der Bedingung, dass die Situationskonstanten $\varkappa^{\alpha\lambda}_{\alpha_i}$ der Flächen $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ in Bezug auf einander die Bedingungen erfüllen:

$$5'')\qquad K_\lambda \equiv \sum_{1}^{n} {}^{i} \varkappa^{\alpha\lambda}_{\alpha_i} < 1, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n,$$

wo das Symbol $\varkappa^{\alpha\lambda}_{\alpha_\lambda} = 0$ zu setzen ist.

Der Beweis dieses Satzes ist dem Beweis von IVa. völlig analog. Bezeichnet man mit K die grösste der Konstanten K_λ (die durch 5″) definiert sind), so ergiebt sich aus den Sätzen IIIa., IIIa′., I. in derselben Weise, wie bei dem Beweise von IVa., dass jedes Glied der Reihe 5′) absolut genommen kleiner (gleich) ist als das entsprechende Glied der geometrischen Reihe:

$$(L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2} + \cdots + L_{\alpha_n})(1 + K + K^2 + \cdots),$$

wo $(-L_{\alpha_1})$ und $(+L_{\alpha_1})$, $(-L_{\alpha_2})$ und $(+L_{\alpha_2})$, ..., $(-L_{\alpha_n})$ und $(+L_{\alpha_n})$ resp. die Grenzen sind, zwischen denen $f_1 f_2 \ldots f_n$ liegen. Die Reihe 5′) ist somit konvergent, sobald $K < 1$ ist, sobald also die Bedingungen 5″) erfüllt sind.

Der übrige Teil des Beweises ist nach dem Beweise von IVa. evident.

Um die Auffindung von Potentialfunktionen, die am Rande ihres Gebietes vorgeschriebene Werte annehmen, handelt es sich bei Problemen der Elektricitäts- und Wärmeverteilung, und auf Probleme dieser Art können die in diesem Abschnitt angegebenen Methoden angewandt werden. So finden mittelst derselben namentlich viele Aufgaben, in denen die kritischen Flächen Kugel- oder Ellipsoidflächen sind, ihre Lösung.

II. Abschnitt.

Über eine kombinatorische Methode zur Reduktion einer Klasse hydrodynamischer und elektrodynamischer Probleme.

Wir werden uns in diesem Abschnitte im Wesentlichen auf die Sätze des I. Abschnittes, ferner aber auch auf einige Sätze aus der allgemeinen Theorie des Potentials stützen, welche wir an die Spitze der hier darzulegenden Untersuchungen stellen.

Ia. Jede Potentialfunktion φ eines Gebietes $\mathfrak{A}$ lässt sich in der Form darstellen:

$$1a)\qquad \varphi = -\frac{1}{4\pi}\int \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial N}}\frac{do}{E} + \frac{1}{4\pi}\int \overline{\varphi}\frac{\cos(EN)}{E^2}do,$$

wo do ein Element des Randes, $\overline{\varphi}$, $\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial N}}$ die Werte der Potentialfunktion und seiner Ableitung nach der in das Gebiet $\mathfrak{A}$ hineingehenden Normalen N in do vorstellen, E die Entfernung des Punktes $(x\,y\,z)$, auf den sich φ bezieht, von do bezeichnet, positiv gerechnet in der Richtung $do \rightarrow (x\,y\,z)$, und die Integrale über alle Elemente do des Randes von $\mathfrak{A}$ auszudehnen sind (Green)*).

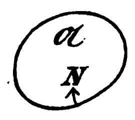


Fig. 5.

Wir können zu Ia. folgenden Zusatz machen:

Zusatz. Konstruieren wir innerhalb des Gebietes $\mathfrak{A}$ eine geschlossene Fläche β, die keine der Begrenzungsflächen des Gebietes $\mathfrak{A}$ umschliesst, und bezeichnen mit $\varphi_\beta \left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_\beta$ die Werte, welche φ und seine

*) Vgl. C. Neumann, Unters. über das log. und Newt. Potential p. 21.

Ableitung nach der äusseren Normalen n von β in einem Elemente do der Fläche β besitzen, so ist für alle Punkte des Gebietes $\mathfrak{A}$, die ausserhalb β liegen, der Ausdruck:

$$1a')\qquad \psi \equiv -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\beta}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\beta}\frac{do}{E}+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\beta}\varphi_{\beta}\frac{\cos(En)}{E^2}do=0,$$

wenn man die Integrale über alle Elemente der Fläche β ausdehnt.

In der That, man kann φ sowohl als Potentialfunktion des Gebietes $\mathfrak{A}$, als auch als Potentialfunktion des Teiles von $\mathfrak{A}$ ansehen, welcher ausserhalb von β liegt (Ia. des I. Abschnittes); indem man die Green'sche Formel 1) einmal auf Grundlage der ersten, das andere Mal auf Grundlage der zweiten Auffassung aufstellt und die beiden so entstehenden Formeln subtrahiert, erhält man unmittelbar die Formel 1a').

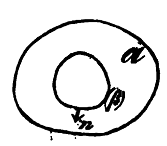


Fig. 6.

Ib. Das Integral:

$$w=\int\limits_{\beta}\frac{\cos(E\nu)}{E^2}do,$$

hinerstreckt über alle Elemente do einer geschlossenen Fläche β, deren innere Normale in do mit ν bezeichnet werde, hat für alle Punkte der Fläche selbst den Wert 2π:

$$1b)\qquad w_{\beta}=2\pi.\quad \text{(Gauss.)*)}$$

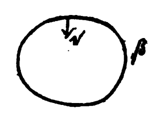


Fig. 7.

[**Bemerkung.** Der Gauss'sche Satz Ib. gilt unter der Bedingung, dass die Fläche keine Ecken oder Kanten hat. Ist letzteres der Fall, so ist die Formel 1b) durch die folgende zu ersetzen:

$$1b')\qquad w_{\beta}=2\pi(1-\varepsilon_{\beta});$$

hierin bezeichnet ε_{β} eine Grösse, die für Punkte der Fläche mit stetiger Krümmung $=0$ ist. Ist die Fläche überall konvex**), so ist $0 \overline{\overline{<}}\, \varepsilon_{\beta} \overline{\overline{<}}\, 1$ ***)].

Ic. Ist μ_{β} eine stetige Funktion der Stelle an der geschlossenen Fläche β, so ist das Integral:

*) Gauss' Werke B. 5 S. 9.

) Eine Fläche ist überall konvex, wenn ihre Tangenten mit ihr keinen weiteren Punkt gemein haben, als den Berührungspunkt, oder höchstens **eine zusammenhängende Strecke.

***) cf. C. Neumann, Unters. über d. log. und Newt. Potential ($2\pi\varepsilon_{\beta}=\vartheta_{\beta}$) p. 134, 190.

$$W = \int_\beta \mu_\beta \frac{\cos(E\nu)}{E^2} do,$$

hinerstreckt über alle Elemente do der Fläche β, sowohl eine Potentialfunktion des inneren Gebietes i, als auch eine Potentialfunktion des äusseren Gebietes a. Bezeichnet man mit $W_{i\beta}$ und $W_{a\beta}$ resp. die Grenzwerte dieser Potentialfunktionen an einem Punkt β der Fläche (β), während W_β den Wert des Integrales in jenem Punkte selbst repräsentieren soll, so ist:

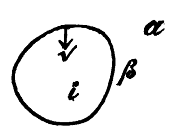


Fig. 8.

$$1c) \quad \begin{cases} W_{a\beta} = W_\beta - 2\pi\mu_\beta, \\ W_{i\beta} = W_\beta + 2\pi\mu_\beta, \end{cases}$$

wo μ_β sich auf jenen bestimmten Punkt β bezieht (C. Neumann)*).

[**Bemerkung.** Auch dieser Satz Ic. gilt unter der Bedingung, dass die Fläche β keine Ecken oder Kanten hat; in diesem Falle sind die Formeln 1c) durch die folgenden zu ersetzen:

$$1c') \quad \begin{cases} W_{a\beta} = W_\beta - 2\pi(1 - \varepsilon_\beta)\mu_\beta, \\ W_{i\beta} = W_\beta + 2\pi(1 + \varepsilon_\beta)\mu_\beta, \end{cases}$$

wo ε_β eine Grösse ist, die für Punkte β der Fläche mit stetiger Krümmung $= 0$ ist und, wenn (β) überall konvex ist, der Bedingung genügt:

$$0 \leqq \varepsilon_\beta \leqq 1^{**})].$$

Aus dem Satze Ic. folgt unmittelbar der

Zusatz. Es ist, wenn wir unter Max W_β und Min W_β die grössten und kleinsten Werte von W_β verstehen:

$$1c'') \quad \begin{cases} \text{Min}\, W_\beta - 2\pi\mu_\beta \leqq W_{a\beta} \leqq \text{Max}\, W_\beta - 2\pi\mu_\beta, \\ \text{Min}\, W_\beta + 2\pi\mu_\beta \leqq W_{i\beta} \leqq \text{Max}\, W_\beta + 2\pi\mu_\beta. \end{cases}$$

[Für den Fall, dass die Fläche Ecken oder Kanten hat, lauten diese Formeln entsprechend 1c'):

$$1c''') \begin{cases} \text{Min}(W_\beta + 2\pi\varepsilon_\beta\mu_\beta) - 2\pi\mu_\beta \leqq W_{a\beta} \leqq \text{Max}(W_\beta + 2\pi\varepsilon_\beta\mu_\beta) - 2\pi\mu_\beta, \\ \text{Min}(W_\beta + 2\pi\varepsilon_\beta\mu_\beta) + 2\pi\mu_\beta \leqq W_{i\beta} \leqq \text{Max}(W_\beta + 2\pi\varepsilon_\beta\mu_\beta) + 2\pi\mu_\beta, \end{cases}$$

wo ε_β die frühere Bedeutung besitzt].

---

*) cf. C. Neumann, Unters. über d. log. und Newt. Potential p. 150—152.

**) C. Neumann, Unters. über d. log. und Newt. Potential p. 150—152 und p. 190.

Id. Versteht man unter W_β dasselbe Integral, wie im Satze Ic., so ist, wenn die Fläche β überall konvex ist:

$$\text{1d)}\quad \operatorname{Max} W_\beta - \operatorname{Min} W_\beta \overline{\overline{<}} 2\pi\lambda_\beta(\operatorname{Max}\mu_\beta - \operatorname{Min}\mu_\beta),$$

wo λ_β die von C. Neumann in der Methode des arithmetischen Mittels eingeführte Konfigurationskonstante der Fläche β vorstellt. Die Konstante λ_β ist ein positiver echter Bruch, wenn sich auf β nicht 2 Punkte von solcher Beschaffenheit angeben lassen, dass alle Tangenten der Fläche durch einen dieser Punkte hindurchgehen.

[Besitzt die Fläche β Ecken oder Kanten, so ist an die Stelle der Formel 1d) die folgende zu setzen:

$$\text{1d}')\quad \begin{aligned} &\operatorname{Max}(W_\beta + 2\pi\varepsilon_\beta\mu_\beta) - \operatorname{Min}(W_\beta + 2\pi\varepsilon_\beta\mu_\beta) \\ &\qquad \overline{\overline{<}} 2\pi\lambda_\beta(\operatorname{Max}\mu_\beta - \operatorname{Min}\mu_\beta)] \end{aligned}$$ (C. Neumann)*).

Wir wollen nun aus dem Satz Ic. eine Folgerung für den Fall ableiten, dass die Fläche (β) überall konvex ist. In diesem Falle ist für jeden Punkt β der Fläche (β) jedes:

$$\frac{\cos(E_\beta \nu)}{E_\beta^{\,2}}\, do \overline{\overline{>}} 0,$$

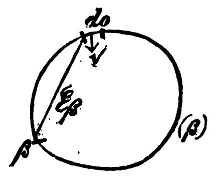


Fig. 9.

somit ist:

$$\operatorname{Min}\mu_\beta \int \frac{\cos(E_\beta \nu)}{E_\beta^{\,2}}\, do \overline{\overline{<}} W_\beta \overline{\overline{<}} \operatorname{Max}\mu_\beta \int \frac{\cos(E_\beta \nu)}{E_\beta^{\,2}}\, do.$$

oder:

$$\operatorname{Min}\mu_\beta \cdot w_\beta \overline{\overline{<}} W_\beta \overline{\overline{<}} \operatorname{Max}\mu_\beta \cdot w_\beta.$$

Hieraus folgt nach Ib.:

$$2\pi \operatorname{Min}\mu_\beta \overline{\overline{<}} W_\beta \overline{\overline{<}} 2\pi \operatorname{Max}\mu_\beta,$$

und hierauf nach Ic.:

$$\text{2)}\quad \begin{cases} 2\pi\{\operatorname{Min}\mu_\beta - \mu_\beta\} \overline{\overline{<}} W_{a\beta} \overline{\overline{<}} 2\pi\{\operatorname{Max}\mu_\beta - \mu_\beta\}, \\ 2\pi\{\operatorname{Min}\mu_\beta + \mu_\beta\} \overline{\overline{<}} W_{i\beta} \overline{\overline{<}} 2\pi\{\operatorname{Max}\mu_\beta + \mu_\beta\}. \end{cases}$$

[Besitzt die Fläche β Kanten oder Ecken, so haben die letzten fünf Zeilen so zu lauten:

*) In dem Satze Id. sind die Resultate, welche C. Neumann in seinen Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential p. 183—185 erhalten hat, in Worten ausgedrückt.

Die Definition der Konfigurationskonstanten findet sich ib. p. 172, 173.

Hieraus folgt nach 1b′):

$$2\pi(1-\varepsilon_\beta)\operatorname{Min}\mu_\beta \leqq W_\beta \leqq 2\pi(1-\varepsilon_\beta)\operatorname{Max}\mu_\beta,$$

und hierauf nach 1c′) zunächst:

$$2\pi(1-\varepsilon_\beta)\left\{\operatorname{Min}\mu_\beta-\mu_\beta\right\} \leqq W_{a\beta} \leqq 2\pi(1-\varepsilon_\beta)\left\{\operatorname{Max}\mu_\beta-\mu_\beta\right\}.$$

Da nun die $\{-\}$ links negativ, rechts positiv ist und:

$$0 \leqq 1-\varepsilon_\beta \leqq 1,$$

so folgt auch:

$$2\pi\left\{\operatorname{Min}\mu_\beta-\mu_\beta\right\} \leqq W_{a\beta} \leqq 2\pi\left\{\operatorname{Max}\mu_\beta-\mu_\beta\right\},$$

und da:

$$W_{i\beta}=W_{a\beta}+4\pi\mu_\beta:$$

$$2\pi\left\{\operatorname{Min}\mu_\beta+\mu_\beta\right\} \leqq W_{i\beta} \leqq 2\pi\left\{\operatorname{Max}\mu_\beta+\mu_\beta\right\},$$

d. h. die Formeln 2) gelten auch in diesem Fall.]

Wir haben so den Satz gewonnen:

II. Ist μ_β eine stetige Funktion der Stelle an einer geschlossenen, überall konvexen Fläche β [die auch Kanten und Ecken besitzen darf], so nähern sich die Werte des Integrals:

$$W=\int_\beta \mu_\beta \frac{\cos(E\nu)}{E^2}\,do$$

beim Heranrücken des Punktes (xyz) an einen Punkt β der Fläche von der inneren Seite derselben und von der äusseren resp. den Grenzwerten $W_{i\beta}$ und $W_{a\beta}$, welche die Bedingungen erfüllen:

$$2)\quad \begin{cases} 2\pi\left\{\operatorname{Min}\mu_\beta-\mu_\beta\right\} \leqq W_{a\beta} \leqq 2\pi\left\{\operatorname{Max}\mu_\beta-\mu_\beta\right\}, \\ 2\pi\left\{\operatorname{Min}\mu_\beta+\mu_\beta\right\} \leqq W_{i\beta} \leqq 2\pi\left\{\operatorname{Max}\mu_\beta+\mu_\beta\right\}, \end{cases}$$

wobei β einen beliebigen Punkt der Fläche (β) vorstellt.

Wir betrachten nun 2 getrennte, geschlossene, überall konvexe Flächen $\alpha\beta$ und bezeichnen, wie im I. Abschnitt, den ausserhalb α liegenden Teil des Raumes mit T_α, mit T_β resp. den ausserhalb oder innerhalb β liegenden Teil des Raumes, je nachdem α von β nicht umschlossen wird oder ganz innerhalb von β liegt. Wir beginnen unsere Untersuchungen mit dem Fall:



a) Die Fläche α werde von der Fläche β nicht umschlossen.

Wir betrachten eine Potentialfunktion Φ_α des Raumes T_α, deren Werte an der Fläche α zwischen den Grenzen $(-L_\alpha)$ und $(+L_\alpha)$ liegen $(L_\alpha \gtreqless 0)$, dann ist nach Satz IIIa. des I. Abschnittes an der Fläche β:

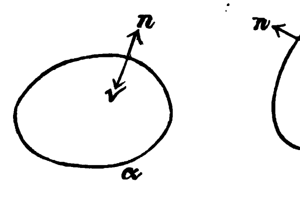


Fig. 10.

$$\text{a)} \qquad -L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta \leqq \Phi_{\alpha\beta} \leqq +L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta,$$

wo $\varkappa_\alpha^\beta$ die Situationskonstante der Fläche α in Bezug auf die Fläche β vorstellt.

Wir bezeichnen nun mit Φ_β die Potentialfunktion des Gebietes T_β, die an der Fläche β die Bedingung erfüllt:

$$\text{b)} \qquad \left|\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial n}\right|_\beta = -\left|\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial n}\right|_\beta \text{*)}.$$

Nun ist einmal nach Satz Ia. dieses Abschnittes:

$$\text{c)} \quad \Phi_\beta = -\frac{1}{4\pi}\int \left|\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial n}\right|_\beta \frac{do}{E} + \frac{1}{4\pi}\int \Phi_{\beta\beta}\frac{\cos(En)}{E^2}\, do \ (\text{Gebiet } T_\beta),$$

oder mit Berücksichtigung von b):

$$\text{c')} \quad \Phi_\beta = +\frac{1}{4\pi}\int \left|\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial n}\right|_\beta \frac{do}{E} + \frac{1}{4\pi}\int \Phi_{\beta\beta}\frac{\cos(En)}{E^2}\, do \ (\text{Gebiet } T_\beta),$$

andererseits ist nach dem Zusatz zu Satz Ia. dieses Abschnittes:

$$\text{c'')} \quad 0 = -\frac{1}{4\pi}\int \left|\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial n}\right|_\beta \frac{do}{E} + \frac{1}{4\pi}\int \Phi_{\alpha\beta}\frac{\cos(En)}{E^2}\, do \ (\text{Gebiet } T_\beta).$$

Addieren wir nun die Formeln c') und c''), so folgt:

$$\text{d)} \quad \left.\begin{aligned} \Phi_\beta &= +\frac{1}{4\pi}\int (\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta})\frac{\cos(En)}{E^2}\, do \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int (\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta})\frac{\cos(E\nu)}{E^2}\, do \end{aligned}\right\} \text{Gebiet } T_\beta.$$

Die Fläche β ist überall konvex, somit können wir auf das Integral rechts den Satz II. dieses Abschnittes zur Anwendung bringen. Be-

*) Auf den Beweis der Existenz einer solchen Potentialfunktion Φ_β des Gebietes T_β gehen wir hier nicht ein, wir setzen voraus, sie existiere.

zeichnen wir mit β einen Punkt der Fläche β, so folgt aus der ersten Formel 2), da wir hier:

$$\mu_\beta = \frac{1}{4\pi}(\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta})$$

zu setzen haben:

$$\frac{1}{2}\{\operatorname{Min}(\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta}) - (\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta})\} \overline{\gtrless} - \Phi_{\beta\beta}$$

$$\overline{\gtrless} \frac{1}{2}\{\operatorname{Max}(\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta}) - (\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta})\}.$$

Nun ist:

$$\operatorname{Min}(\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta}) \overline{\gtrless} \operatorname{Min}\Phi_{\alpha\beta} + \operatorname{Min}\Phi_{\beta\beta}, \quad \operatorname{Max}(\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta}) \overline{\gtrless} \operatorname{Max}\Phi_{\alpha\beta} + \operatorname{Max}\Phi_{\beta\beta},$$

(nach a):

$$\operatorname{Min}\Phi_{\alpha\beta} - \Phi_{\alpha\beta} \overline{\gtrless} - 2L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta, \qquad \operatorname{Max}\Phi_{\alpha\beta} - \Phi_{\alpha\beta} \overline{\gtrless} 2L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta,$$

somit können wir die vorangehende Ungleichung so schreiben:

$$-2L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta + \operatorname{Min}\Phi_{\beta\beta} \overline{\gtrless} - \Phi_{\beta\beta} \overline{\gtrless} + 2L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta + \operatorname{Max}\Phi_{\beta\beta}.$$

Hieraus folgt, wenn wir die Ungleichung links auf den Fall $\Phi_{\beta\beta} = \operatorname{Max}$, die Ungleichung rechts auf den Fall $\Phi_{\beta\beta} = \operatorname{Min}$ anwenden:

$$\text{e)} \qquad -2L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta \overline{\gtrless} \operatorname{Max}\Phi_{\beta\beta} + \operatorname{Min}\Phi_{\beta\beta} \overline{\gtrless} 2L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta.$$

Andererseits folgt aus der 1. Formel 1c''), indem wir unter W_β den Wert des Integrals:

$$\int \mu_\beta \frac{\cos(E\nu)}{E^2}\, do$$

in einem Punkt β der Fläche (β) verstehen:

$$-\Phi_{\beta\beta} \overline{\gtrless} \operatorname{Max} W_\beta - \frac{1}{2}(\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta}),$$

$$-\Phi_{\beta\beta} \overline{\gtrless} \operatorname{Min} W_\beta - \frac{1}{2}(\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta}).$$

Indem wir die erste dieser Formeln für den Fall $\Phi_{\beta\beta} = \operatorname{Min}$, die zweite Formel für den Fall $\Phi_{\beta\beta} = \operatorname{Max}$ in Anwendung bringen, ergiebt sich (mit Hilfe von a):

$$-\operatorname{Min}\Phi_{\beta\beta} \overline{\gtrless} 2\operatorname{Max} W_\beta + L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta,$$

$$-\operatorname{Max}\Phi_{\beta\beta} \overline{\gtrless} 2\operatorname{Min} W_\beta - L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta,$$

und hieraus durch Subtraktion:

$$\operatorname{Max}\Phi_{\beta\beta} - \operatorname{Min}\Phi_{\beta\beta} \overline{\gtrless} 2(\operatorname{Max} W_\beta - \operatorname{Min} W_\beta) + 2L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta.$$

Jetzt bringen wir die Formel 1d) zur Anwendung, indem wir voraussetzen (wie jetzt immer geschehen soll), dass die Prämisse des Satzes Id. von der Fläche (β) erfüllt werde, dann folgt:

$$\operatorname{Max}\Phi_{\beta\beta} - \operatorname{Min}\Phi_{\beta\beta} \leqq \lambda_\beta \left\{\operatorname{Max}(\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta}) - \operatorname{Min}(\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta})\right\} + 2L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta \text{*)},$$

und hieraus:

$$\text{f)} \qquad \operatorname{Max}\Phi_{\beta\beta} - \operatorname{Min}\Phi_{\beta\beta} \leqq 2\,\frac{1+\lambda_\beta}{1-\lambda_\beta}\,L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta,$$

wo λ_β die Konfigurationskonstante der Fläche β vorstellt. Wir kombinieren nun die Formeln e) und f), indem wir einmal f) zu der rechten Ungleichung e) addieren, das andere Mal sie von der linken Ungleichung e) subtrahieren, dann folgt:

$$\operatorname{Max}\Phi_{\beta\beta} \leqq \frac{2}{1-\lambda_\beta}\,L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta,$$

$$\operatorname{Min}\Phi_{\beta\beta} \geqq -\frac{2}{1-\lambda_\beta}\,L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta.$$

---

*) Für den Fall, dass die Fläche β Ecken oder Kanten besitzt, sind die der Formel e) nachfolgenden Betrachtungen in folgender Weise zu modificieren:

Es folgt aus der 1. Formel 1c'''):

$$-\Phi_{\beta\beta} \leqq \operatorname{Max}\left(W_\beta + \frac{1}{2}\varepsilon_\beta\left\{\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta}\right\}\right) - \frac{1}{2}\left(\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta}\right),$$

$$-\Phi_{\beta\beta} \geqq \operatorname{Min}\left(W_\beta + \frac{1}{2}\varepsilon_\beta\left\{\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta}\right\}\right) - \frac{1}{2}\left(\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta}\right);$$

durch Anwendung der ersten Formel auf den Fall $\Phi_{\beta\beta} = \text{Min}$, der zweiten auf den Fall $\Phi_{\beta\beta} = \text{Max}$ (mit Hilfe von a):

$$-\operatorname{Min}\Phi_{\beta\beta} \leqq 2\operatorname{Max}\left(W_\beta + \frac{1}{2}\varepsilon_\beta\left\{\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta}\right\}\right) + L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta,$$

$$-\operatorname{Max}\Phi_{\beta\beta} \geqq 2\operatorname{Min}\left(W_\beta + \frac{1}{2}\varepsilon_\beta\left\{\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta}\right\}\right) - L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta;$$

durch Subtraktion dieser Formeln erhalten wir:

$$\operatorname{Max}\Phi_{\beta\beta} - \operatorname{Min}\Phi_{\beta\beta}$$
$$\leqq 2\left\{\operatorname{Max}\left(W_\beta + \frac{1}{2}\varepsilon_\beta\left\{\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta}\right\}\right) - \operatorname{Min}\left(W_\beta + \frac{1}{2}\varepsilon_\beta\left\{\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta}\right\}\right)\right\} + 2L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta$$

und hieraus durch Anwendung der Formel 1d'):

$$\operatorname{Max}\Phi_{\beta\beta} - \operatorname{Min}\Phi_{\beta\beta} \leqq \lambda_\beta\left\{\operatorname{Max}(\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta}) - \operatorname{Min}(\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\beta})\right\} + 2L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta,$$

genau, wie vorher, so dass wir den Fall der Ecken oder Kanten nicht auszuschliessen brauchen.

somit:

$$\text{g)} \qquad -\frac{2}{1-\lambda_\beta}\varkappa_\alpha^\beta L_\alpha \overset{=}{<} \Phi_{\beta\beta} \overset{=}{<} +\frac{2}{1-\lambda_\beta}\varkappa_\alpha^\beta L_\alpha .$$

IIa. (Definition.) Wir definieren als die hydrodynamische Situationskonstante der Fläche α in Bezug auf die Fläche β die Grösse:

$$\text{2a)} \qquad \nu_\alpha^\beta = \frac{2\varkappa_\alpha^\beta}{1-\lambda_\beta},$$

wo $\varkappa_\alpha^\beta$ die Situationskonstante der Fläche α in Bezug auf die Fläche β, λ_β die Konfigurationskonstante der Fläche β vorstellt.

Wir können dann g) in folgender Weise schreiben:

$$\text{3)} \qquad -L_\alpha \nu_\alpha^\beta \overset{=}{<} \Phi_{\beta\beta} \overset{=}{<} +L_\alpha \nu_\alpha^\beta$$

und den Satz aussprechen:

IIIa. Liegen die Werte einer Potentialfunktion Φ_α des Gebietes T_α an der Fläche α zwischen den Grenzen $(-L_\alpha)$ und $(+L_\alpha)$, wo $L_\alpha \overset{=}{>} 0$ ist, und bezeichnet Φ_β die Potentialfunktion des Gebietes T_β, welche an der Fläche β der Bedingung genügt:

$$\left|\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial n}\right|_\beta = -\left|\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial n}\right|_\beta \quad \text{(vgl. d. Anm. S. 23),}$$

so liegen die Werte, die diese Potentialfunktion Φ_β an der Fläche β hat, zwischen den Grenzen:

$$(-L_\alpha \nu_\alpha^\beta) \text{ und } (+L_\alpha \nu_\alpha^\beta),$$

wo ν_α^β die hydrodynamische Situationskonstante der Fläche α in Bezug auf die Fläche β vorstellt.

In genau derselben Weise folgt:

IIIa'. Liegen die Werte einer Potentialfunktion Φ_β des Gebietes T_β an der Fläche β zwischen den Grenzen $(-L_\beta)$ und $(+L_\beta)$, wo $L_\beta \overset{=}{>} 0$ ist, und bezeichnet Φ_α die Potentialfunktion des Gebietes T_α, welche an der Fläche α der Bedingung genügt:

$$\left|\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial n}\right|_\alpha = -\left|\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial n}\right|_\alpha \quad \text{(vgl. d. Anm. S. 23),}$$

so liegen die Werte, die diese Potentialfunktion an der Fläche α hat, zwischen den Grenzen:

$$(-L_\beta \nu_\beta^\alpha) \text{ und } (+L_\beta \nu_\beta^\alpha),$$

wo ν_β^α die hydrodynamische Situationskonstante der Fläche β in Bezug auf die Fläche α vorstellt.

Aus den Sätzen IIIa. und IIIa'. ergiebt sich nun der Beweis einer kombinatorischen Methode, welche die Lösung der Aufgabe:

„Eine Potentialfunktion $\varphi_{\alpha+\beta}$ des ausserhalb der Flächen α und β liegenden Gebietes $T_{\alpha+\beta}$ zu finden, für welche die Werte $\left|\frac{\partial \varphi_{\alpha+\beta}}{\partial n}\right|_\alpha = A$ und $\left|\frac{\partial \varphi_{\alpha+\beta}}{\partial n}\right|_\beta = B$ an den Flächen α und β gegeben sind“,

unmittelbar angiebt, sobald die beiden Aufgaben:

„Eine Potentialfunktion Φ_α des Gebietes T_α zu finden, für welche die Werte $\left|\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial n}\right|_\alpha$ an der Fläche α gegeben sind“,

und:

„Eine Potentialfunktion Φ_β des Gebietes T_β zu finden, für welche die Werte $\left|\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial n}\right|_\beta$ an der Fläche β gegeben sind“,

ihre Lösung gefunden haben.

Die Methode lautet:

IVa. Man berechne successive die Potentialfunktionen:

	des Gebietes T_α:	des Gebietes T_β:
4a)	φ_α^1, so dass $\left\|\frac{\partial \varphi_\alpha^1}{\partial n}\right\|_\alpha = A$*),	φ_β^1, so dass $\left\|\frac{\partial \varphi_\beta^1}{\partial n}\right\|_\beta = B$,
	φ_α^2, „ „ $\left\|\frac{\partial \varphi_\alpha^2}{\partial n}\right\|_\alpha = -\left\|\frac{\partial \varphi_\beta^1}{\partial n}\right\|_\alpha$,	φ_β^2, „ „ $\left\|\frac{\partial \varphi_\beta^2}{\partial n}\right\|_\beta = -\left\|\frac{\partial \varphi_\alpha^1}{\partial n}\right\|_\beta$,
	φ_α^3, „ „ $\left\|\frac{\partial \varphi_\alpha^3}{\partial n}\right\|_\alpha = -\left\|\frac{\partial \varphi_\beta^2}{\partial n}\right\|_\alpha$,	φ_β^3, „ „ $\left\|\frac{\partial \varphi_\beta^3}{\partial n}\right\|_\beta = -\left\|\frac{\partial \varphi_\alpha^2}{\partial n}\right\|_\beta$,
	— — — — — — — — — —	— — — — — — — — — —
	φ_α^σ, „ „ $\left\|\frac{\partial \varphi_\alpha^\sigma}{\partial n}\right\|_\alpha = -\left\|\frac{\partial \varphi_\beta^{\sigma-1}}{\partial n}\right\|_\alpha$,	φ_β^σ, „ „ $\left\|\frac{\partial \varphi_\beta^\sigma}{\partial n}\right\|_\beta = -\left\|\frac{\partial \varphi_\alpha^{\sigma-1}}{\partial n}\right\|_\beta$,
	— — — — — — — — — —	— — — — — — — — — —
	in inf.	in inf.

*) Wir nehmen die Werte A und B so gegeben an, dass die Funktionen φ_α^σ φ_β^σ wirklich existieren.

dann stellt die unbedingt konvergente Reihe:

$$
4a') \qquad \varphi_{\alpha+\beta} = \sum_{0}^{\infty} i \, (\varphi_\alpha^i + \varphi_\beta^i)
$$

die Potentialfunktion des Gebietes $T_{\alpha+\beta}$ dar, deren normale Ableitungen an den Flächen $\alpha\beta$ resp. die Werte A und B besitzen.

Vorausgesetzt wird dabei, dass die Flächen α und β überall konvex und ihre beiden hydrodynamischen Situationskonstanten echte Brüche sind*).

Beweis: Der Beweis zerfällt in 2 Teile, einmal in den Konvergenzbeweis des Reihe 4a'), andererseits in den Beweis der in IVa., inbetreff der Funktion $\varphi_{\alpha+\beta}$ behaupteten Eigenschaften.

Es seien $(-L_\alpha)$ und $(+L_\alpha)$ die Grenzen, zwischen denen die Werte φ_α^1 an der Fläche α liegen, und $(-L_\beta)$, $(+L_\beta)$ die Grenzen, zwischen denen die Werte φ_β^1 an der Fläche β liegen $\{L_\alpha \geqq 0,\ L_\beta \geqq 0\}$. Dann folgt durch fortgesetzte Anwendung der Sätze IIIa., IIIa'. dieses Abschnittes und des Satzes Ic. des I. Abschnittes, wenn man unter $\nu_{\alpha\beta}$ die grössere der beiden hydrodynamischen Situationkonstanten ν_α^β und ν_β^α versteht:

Es ist:

$$
4a'')\left\{\begin{array}{lll|lll}
 & \text{innerhalb } T_\alpha: & & & \text{innerhalb } T_\beta: & \\
-L_\alpha & \leqq \varphi_\alpha^1 & \leqq + L_\alpha, & -L_\beta & \leqq \varphi_\beta^1 & \leqq + L_\beta, \\
-L_\beta \nu_{\alpha\beta} & \leqq \varphi_\alpha^2 & \leqq + L_\beta \nu_{\alpha\beta}, & -L_\alpha \nu_{\alpha\beta} & \leqq \varphi_\beta^2 & \leqq + L_\alpha \nu_{\alpha\beta}, \\
-L_\alpha \nu_{\alpha\beta}^2 & \leqq \varphi_\alpha^3 & \leqq + L_\alpha \nu_{\alpha\beta}^2, & -L_\beta \nu_{\alpha\beta}^2 & \leqq \varphi_\beta^3 & \leqq + L_\beta \nu_{\alpha\beta}^2, \\
\hline
-L_\beta \nu_{\alpha\beta}^{2\sigma-1} & \leqq \varphi_\alpha^{2\sigma} & \leqq + L_\beta \nu_{\alpha\beta}^{2\sigma-1}, & -L_\alpha \nu_{\alpha\beta}^{2\sigma-1} & \leqq \varphi_\beta^{2\sigma} & \leqq + L_\alpha \nu_{\alpha\beta}^{2\sigma-1}, \\
-L_\alpha \nu_{\alpha\beta}^{2\sigma} & \leqq \varphi_\alpha^{2\sigma+1} & \leqq + L_\alpha \nu_{\alpha\beta}^{2\sigma}. & -L_\beta \nu_{\alpha\beta}^{2\sigma} & \leqq \varphi_\beta^{2\sigma+1} & \leqq + L_\beta \nu_{\alpha\beta}^{2\sigma}, \\
\hline
 & \text{in inf.} & & & \text{in inf.} &
\end{array}\right.
$$

Aus diesen Formeln geht hervor, dass jedes Glied:

$$
\varphi_\alpha^i + \varphi_\beta^i
$$

der Reihe 4a') absolut genommen:

$$
\leqq (L_\alpha + L_\beta)\, \nu_{\alpha\beta}^i
$$

---

*) Aus der Form des Beweises ist unmittelbar zu ersehen, dass der Satz auch gültig bleibt, wenn nur das Produkt der beiden hydrodynamischen Situationskonstanten ein echter Bruch ist.

ist, also kleiner oder gleich dem entsprechenden Gliede der geometrischen Reihe:

$$(L_\alpha + L_\beta)\{1 + \nu_{\alpha\beta} + \nu_{\alpha\beta}^2 + \cdots\}.$$

Da nun ν_α^β und ν_β^α nach Voraussetzung echte Brüche sind, somit dasselbe von $\nu_{\alpha\beta}$ gilt, so folgt hieraus, dass die Reihe 4a') unbedingt konvergent ist.

Wir gehen nun zum 2. Teile des Beweises über.

Die Funktionen φ_α^i und φ_β^i sind resp. Potentialfunktionen der Gebiete T_α und T_β, sie sind (nach Ia., des I. Abschnittes) auch Potentialfunktionen des beiden Gebieten gemeinsamen Teiles $T_{\alpha+\beta}$; und es folgt (nach Satz Ib. des I. Abschnittes), dass $\varphi_{\alpha+\beta}$ eine Potentialfunktion des Gebietes $T_{\alpha+\beta}$ ist. Andererseits folgt durch Addition der Formeln 4a):

$$4\text{a}''')\quad \begin{cases} \sum_0^\infty i \left|\frac{\partial \varphi_\alpha^i}{\partial n}\right|_\alpha = A - \sum_0^\infty i \left|\frac{\partial \varphi_\beta^i}{\partial n}\right|_\alpha, \\ \sum_0^\infty i \left|\frac{\partial \varphi_\beta^i}{\partial n}\right|_\beta = B - \sum_0^\infty i \left|\frac{\partial \varphi_\alpha^i}{\partial n}\right|_\beta, \end{cases}$$

und diese Formeln können wir auch so schreiben:

$$4\text{a}'''')\quad \begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial n} \sum_0^\infty i(\varphi_\alpha^i + \varphi_\beta^i)\right]_\alpha = A, \\ \left[\frac{\partial}{\partial n} \sum_0^\infty i(\varphi_\alpha^i + \varphi_\beta^i)\right]_\beta = B; \end{cases}$$

dies war zu beweisen.

b) Der Fall, dass die Fläche α von der Fläche β umschlossen wird, führt nicht zu Resultaten, welche zu den Sätzen IIIa. und IVa. eine gewisse Analogie zeigen.

Wir können nun die Methode IVa., ähnlich wie im I. Abschnitt, unter gewissen Beschränkungen auf den allgemeinen Fall von n getrennten, geschlossenen, überall konvexen Flächen ausdehnen:

V. Es seien $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ n geschlossene, von einander getrennte, überall konvexe Flächen, von denen keine von irgend einer der übrigen umschlossen wird. Durch jede der Flächen $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ wird der Raum in 2 Gebiete geteilt, von denen wir die äusseren (ins Unendliche reichenden) Gebiete resp. mit $T_{\alpha_1} T_{\alpha_2} \ldots T_{\alpha_n}$ bezeichnen. Sind dann $f_1 f_2 \ldots f_n$ *) gegebene Funktionen der Stelle resp. an den Flächen $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$, und berechnet man successive die Potentialfunktionen:

*) Wir nehmen die $f_1 f_2 \ldots f_n$ so gegeben an, dass die Funktionen $\varphi_{\alpha_i}^0$ (s. folg. S.) wirklich existieren.

5)

für das Gebiet T_{α_1}:

$$\varphi^1_{\alpha_1}, \text{ so dass } \left|\frac{\partial \varphi^1_{\alpha_1}}{\partial n}\right|_{\alpha_1} = f_{\alpha_1},$$

$$\varphi^2_{\alpha_1}, \;„\; „ \left|\frac{\partial \varphi^2_{\alpha_1}}{\partial n}\right|_{\alpha_1} = -\left[\frac{\partial \varphi^1_{\alpha_2}}{\partial n} + \frac{\partial \varphi^1_{\alpha_3}}{\partial n} + \cdots + \frac{\partial \varphi^1_{\alpha_n}}{\partial n}\right]_{\alpha_1},$$

$$\varphi^3_{\alpha_1}, \;„\; „ \left|\frac{\partial \varphi^3_{\alpha_1}}{\partial n}\right|_{\alpha_1} = -\left[\frac{\partial \varphi^2_{\alpha_2}}{\partial n} + \frac{\partial \varphi^2_{\alpha_3}}{\partial n} + \cdots + \frac{\partial \varphi^1_{\alpha_n}}{\partial n}\right]_{\alpha_1},$$

— — — — — — — — — — — —

$$\varphi^\sigma_{\alpha_1}, \;„\; „ \left|\frac{\partial \varphi^\sigma_{\alpha_1}}{\partial n}\right|_{\alpha_1} = -\left[\frac{\partial \varphi^{\sigma-1}_{\alpha_2}}{\partial n} + \frac{\partial \varphi^{\sigma-1}_{\alpha_3}}{\partial n} + \cdots + \frac{\partial \varphi^{\sigma-1}_{\alpha_n}}{\partial n}\right]_{\alpha_1},$$

— — — — — — — — — — — —

in inf.

für das Gebiet T_{α_2}:

$$\varphi^1_{\alpha_2}, \text{ so dass } \left|\frac{\partial \varphi^1_{\alpha_2}}{\partial n}\right|_{\alpha_2} = f_{\alpha_2},$$

$$\varphi^2_{\alpha_2}, \;„\; „ \left|\frac{\partial \varphi^2_{\alpha_2}}{\partial n}\right|_{\alpha_2} = -\left[\frac{\partial \varphi^1_{\alpha_1}}{\partial n} + \frac{\partial \varphi^1_{\alpha_3}}{\partial n} + \cdots + \frac{\partial \varphi^1_{\alpha_n}}{\partial n}\right]_{\alpha_2},$$

$$\varphi^3_{\alpha_2}, \;„\; „ \left|\frac{\partial \varphi^3_{\alpha_2}}{\partial n}\right|_{\alpha_2} = -\left[\frac{\partial \varphi^2_{\alpha_1}}{\partial n} + \frac{\partial \varphi^2_{\alpha_3}}{\partial n} + \cdots + \frac{\partial \varphi^1_{\alpha_n}}{\partial n}\right]_{\alpha_2},$$

— — — — — — — — — — — —

$$\varphi^\sigma_{\alpha_2}, \;„\; „ \left|\frac{\partial \varphi^\sigma_{\alpha_2}}{\partial n}\right|_{\alpha_2} = -\left[\frac{\partial \varphi^{\sigma-1}_{\alpha_1}}{\partial n} + \frac{\partial \varphi^{\sigma-1}_{\alpha_3}}{\partial n} + \cdots + \frac{\partial \varphi^{\sigma-1}_{\alpha_n}}{\partial n}\right]_{\alpha_2},$$

— — — — — — — — — — — —

in inf.

— — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — —

für das Gebiet T_{α_n}:

$$\varphi^1_{\alpha_n}, \text{ so dass } \left[\frac{\partial \varphi^1_{\alpha_n}}{\partial n}\right]_{\alpha_n} = f_{\alpha_n},$$

$$\varphi^2_{\alpha_n}, \;„\; „ \left[\frac{\partial \varphi^2_{\alpha_n}}{\partial n}\right]_{\alpha_n} = -\left[\frac{\partial \varphi^1_{\alpha_1}}{\partial n} + \frac{\partial \varphi^1_{\alpha_2}}{\partial n} + \cdots + \frac{\partial \varphi^1_{\alpha_{n-1}}}{\partial n}\right]_{\alpha_n},$$

$$\varphi^3_{\alpha_n}, \;„\; „ \left[\frac{\partial \varphi^3_{\alpha_n}}{\partial n}\right]_{\alpha_n} = -\left[\frac{\partial \varphi^2_{\alpha_1}}{\partial n} + \frac{\partial \varphi^2_{\alpha_2}}{\partial n} + \cdots + \frac{\partial \varphi^2_{\alpha_{n-1}}}{\partial n}\right]_{\alpha_n},$$

— — — — — — — — — — — —

$$\varphi^\sigma_{\alpha_n}, \;„\; „ \left[\frac{\partial \varphi^\sigma_{\alpha_n}}{\partial n}\right]_{\alpha_n} = -\left[\frac{\partial \varphi^{\sigma-1}_{\alpha_1}}{\partial n} + \frac{\partial \varphi^{\sigma-1}_{\alpha_2}}{\partial n} + \cdots + \frac{\partial \varphi^{\sigma-1}_{\alpha_{n-1}}}{\partial n}\right]_{\alpha_n},$$

— — — — — — — — — — — —

in inf.

dann stellt die Reihe:

$$5')\qquad \varphi = \sum_0^{\infty} i \sum_1^{n} \lambda\, \varphi^{i}_{\alpha_\lambda}$$

die Potentialfunktion des ausserhalb der Flächen $\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n$ liegenden Gebietes $T_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$ dar, welche an den Flächen $\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n$ resp. die normalen Ableitungen $f_1\,f_2\ldots f_n$ besitzt:

$$5'')\qquad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_{\alpha_i} = f_{\alpha_i}.$$

Der Satz gilt unter der Bedingung, dass die hydrodynamischen Situationskonstanten $\nu^{\alpha\lambda}_{\alpha_i}$ der Flächen $\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n$ in Bezug auf einander die Bedingungen erfüllen:

$$5''')\qquad N_\lambda < 1,\quad N_\lambda \equiv \sum_1^{n} i\, \nu^{\alpha\lambda}_{\alpha_i},\quad \lambda = 1\ldots n,$$

wo das Symbol $\nu^{\alpha\lambda}_{\alpha_\lambda} = 0$ zu setzen ist.

Der Beweis dieses Satzes folgt in genau derselben Weise mit Hülfe der Sätze dieses Abschnittes, wie der Beweis des Satzes V. im I. Abschnitt aus den entsprechenden Sätzen des I. Abschnittes.

Um die Auffindung von Potentialfunktionen eines gegebenen Gebietes, deren normale Ableitungen an den Grenzflächen des Gebietes vorgeschrieben sind, handelt es sich einmal bei den hydrodynamischen Aufgaben, in denen die Bewegung einer das Gebiet 𝔄 ausfüllenden Flüssigkeit gesucht wird, wenn ihre Grenzflächen irgend welchen Veränderungen unterworfen sind (Bewegung starrer Körper in Flüssigkeiten). Andererseits auch bei den elektrodynamischen Aufgaben, in welchen nach der Verteilung des elektrischen Stromes in einem homogenen, das Gebiet 𝔄 ausfüllenden Konduktor gefragt wird, wenn die Einströmungen an der Oberfläche desselben gegeben sind. Es werden namentlich viele Aufgaben, in denen die kritischen Flächen Kugel- oder Ellipsoidflächen sind, durch die in diesem Abschnitt bewiesenen Methoden ihre Lösung finden.

Während die Methode IIIa. des I. Abschnittes für 2 beliebige getrennte, sich nicht umschliessende Flächen $\alpha\beta$ giltig war, mussten wir bei dem entsprechenden Satz IIIa. des II. Abschnittes 2 Voraussetzungen hinzufügen:

1. *dass die Flächen $\alpha\beta$ überall konvex sein müssen,*
2. *dass die hydrodynamischen Situationskonstanten $\nu_\alpha^\beta\,\nu_\beta^\alpha$ echte Brüche sein müssen, wozu erforderlich ist, dass die Flächen $\alpha\beta$ in einer gewissen Entfernung von einander bleiben*).*

Wir haben in diesem Abschnitt diese Bedingungen für die Giltigkeit der Methode IIIa. als hinreichend erkannt; die sich hierauf erhebende Frage nach den notwendigen Bedingungen scheint auf grössere Schwierigkeiten zu führen.

---

*) Zur Illustration der Grenzen dieser Methode sei bemerkt, dass für den speciellen Fall, dass $\alpha\beta$ 2 Kugelflächen vom Radius 1 sind, die Bedingung 2) verlangt, dass ihre Centraldistanz > 5 ist.

III. Abschnitt.

Über eine kombinatorische Methode zur Reduktion von Problemen der magnetischen Induktion.

In dem I. und II. Abschnitt haben wir die Grenzbedingungen, die für Potentialfunktionen eines Gebietes $\mathfrak{A}$ vorgeschrieben sind, in den beiden Formen angenommen, dass einmal die Randwerte der Funktionen selbst, das andere Mal ihre normalen Ableitungen an den Grenzflächen des Gebietes $\mathfrak{A}$ als gegeben vorausgesetzt wurden. Wir werden in diesem Abschnitt Grenzbedingungen in Betracht ziehen, wie sie bei den Problemen der magnetischen Induktion auftreten.

Wir entnehmen der Theorie der magnetischen Induktion das folgende Resultat:

I. Wirken auf einen beliebigen magnetisierbaren Körper irgend welche magnetischen Ursachen ein, deren Potential für Punkte des Körpers mit V bezeichnet werde, so wird sich der Magnetismus im Innern des Körpers so verteilen, dass sein Gesammtpotential Q auf beliebige Punkte innerhalb oder ausserhalb des Körpers der Formel entspricht:

$$1) \qquad Q = \varkappa \int \frac{\partial (Q + V)}{\partial \mathrm{N}} \frac{do}{E},$$

wo do ein Element der Oberfläche, N seine innere Normale bezeichnet, das Integral über alle Elemente der Oberfläche auszudehnen ist und $\varkappa$ eine dem Körper eigentümliche Konstante vorstellt, welche für die sogenannten magnetischen Körper eine positive Zahl ist*).

*) Vgl. C. Neumann, Unters. über das log. und Newt. Potential p. 244–45.

Wir können nun Q einmal als eine Potentialfunktion des ausserhalb des magnetischen Körpers liegenden Raumes auffassen, andererseits aber auch als eine Potentialfunktion des inneren Raumes; in letzterem Falle werden wir die Funktion mit $\overline{Q}$ bezeichnen. Die Aufgabe, das durch das Potential V inducierte magnetische Potential des gegebenen Körpers zu finden, ist bei dieser Bezeichnung identisch mit der folgenden:

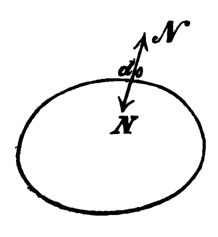


Fig. 11.

Es sind die Potentialfunktionen Q des Aussenraumes, $\overline{Q}$ des Innenraumes so zu bestimmen, dass an der Grenze der beiden Gebiete die Bedingungen erfüllt sind:

$$1') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial \mathcal{N}} + (1 + 4\pi\varkappa)\dfrac{\partial \overline{Q}}{\partial \mathrm{N}} + 4\pi\varkappa \dfrac{\partial V}{\partial \mathrm{N}} = 0, \\ Q = \overline{Q}, \end{cases}$$

wo $\mathcal{N}$ die nach aussen, N die nach innen gerichtete Normale der Grenzfläche vorstellt*).

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit dem Fall:

a) Der magnetische Körper bestehe aus 2 getrennten Teilen, die resp. von den überall konvexen Flächen α und β begrenzt werden.

Die Fläche α teilt den Raum in ein inneres Gebiet S_α und ein äusseres T_α, die Fläche β teilt den Raum in ein inneres Gebiet S_β und ein äusseres T_β.

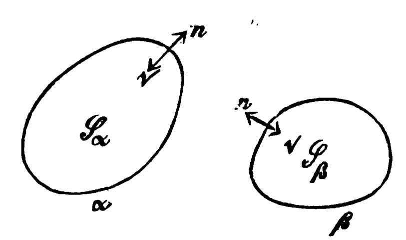


Fig. 12.

Wir betrachten eine Potentialfunktion Φ_α des Raumes T_α, deren Werte an der Fläche α zwischen den Grenzen $(-L_\alpha)$ und $(+L_\alpha)$ liegen; dann ist (Satz IIIa. des I. Abschnittes) an der Fläche β:

$$a) \qquad -L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta \overline{\overline{<}} \Phi_{\alpha\beta} \overline{\overline{<}} + L_\alpha \varkappa_\alpha^\beta,$$

wo $\varkappa_\alpha^\beta$ die Situationskonstante der Fläche α in Bezug auf die Fläche β vorstellt.

---

*) Vgl. C. Neumann, Unters. über das log. und Newt. Potential p. 244—45.

Wir bezeichnen nun mit Φ_β und $\overline{\Phi}_\beta$ resp. die Potentialfunktionen der Gebiete T_β und S_β, welche an der Fläche β die Bedingungen erfüllen:

$$\text{b)}\quad \begin{cases} \left[\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial n} + (1+4\pi\varkappa)\frac{\partial\overline{\Phi}_\beta}{\partial\nu} + 4\pi\varkappa\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial\nu}\right]_\beta = 0, \\ \Phi_{\beta\beta} = \overline{\Phi}_{\beta\beta}\text{*)}. \end{cases}$$

Nun ist nach Satz Ia. des II. Abschnittes:

$$\text{c)}\quad \Phi_\beta = -\frac{1}{4\pi}\int\left|\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial n}\right|_\beta \frac{do}{E} + \frac{1}{4\pi}\int\Phi_{\beta\beta}\frac{\cos(En)}{E^2}do \quad (\text{Gebiet } T_\beta),$$

$$\text{c}')\quad \overline{\Phi}_\beta = -\frac{1}{4\pi}\int\left|\frac{\partial\overline{\Phi}_\beta}{\partial\nu}\right|_\beta \frac{do}{E} + \frac{1}{4\pi}\int\overline{\Phi}_{\beta\beta}\frac{\cos(E\nu)}{E^2}do \quad (\text{Gebiet } S_\beta).$$

Ferner ist nach dem Zusatz zu Satz Ia. des II. Abschnittes:

$$\text{c}'')\quad 0 = -\frac{1}{4\pi}\int\left|\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial n}\right|_\beta \frac{do}{E} + \frac{1}{4\pi}\int\Phi_{\alpha\beta}\frac{\cos(En)}{E^2}do \quad (\text{Gebiet } T_\beta).$$

Bilden wir die Gleichungen c), c′), c″), indem wir den Punkt (xyz), auf den sich die Gleichungen c), c″) beziehen, von aussen, den Punkt (xyz), auf den sich die Gleichung c′) bezieht, von innen einem Punkt der Fläche β unendlich nahe rücken lassen, so folgt:

$$\text{d)}\quad \begin{cases} \Phi_{\beta\beta} = -\frac{1}{4\pi}\left[\int\left|\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial n}\right|_\beta\frac{do}{E}\right]_\beta + \frac{1}{4\pi}\left[\int\Phi_{\beta\beta}\frac{\cos(En)}{E^2}do\right]_{\alpha\beta}^{\text{**)}}, \\ \overline{\Phi}_{\beta\beta} = -\frac{1}{4\pi}\left[\int\left|\frac{\partial\overline{\Phi}_\beta}{\partial\nu}\right|_\beta\frac{do}{E}\right]_\beta + \frac{1}{4\pi}\left[\int\overline{\Phi}_{\beta\beta}\frac{\cos(E\nu)}{E^2}do\right]_{i\beta}, \\ 0 = -\frac{1}{4\pi}\left[\int\left|\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial n}\right|_\beta\frac{do}{E}\right]_\beta + \frac{1}{4\pi}\left[\int\Phi_{\alpha\beta}\frac{\cos(En)}{E^2}do\right]_{\alpha\beta}. \end{cases}$$

Wir multiplicieren diese Formeln resp. mit:

$$1,$$
$$1+4\pi\varkappa,$$
$$-4\pi\varkappa$$

und addieren sie dann; auf diese Weise ergiebt sich mit Rücksicht auf die Formeln b):

---

*) Vgl. d. Anm. S. 23.

) Die doppelten Indices $\alpha\beta$, $i\beta$ sollen anzeigen, dass man die Grenzwerte zu nehmen hat, denen das Integral bei der Annäherung an β von **aussen resp. **innen** zustrebt.

$$2(1+2\pi\varkappa)\Phi_{\beta\beta} = -\frac{1}{4\pi}\left[\int(\Phi_{\beta\beta}-4\pi\varkappa\Phi_{\alpha\beta})\frac{\cos(E\nu)}{E^2}do\right]_{a\beta} + \frac{1+4\pi\varkappa}{4\pi}\left[\int\Phi_{\beta\beta}\frac{\cos(E\nu)}{E^2}do\right]_{i\beta}.$$

Da nun:

$$\left[\int\Phi_{\beta\beta}\frac{\cos(E\nu)}{E^2}do\right]_{i\beta} = \left[\int\Phi_{\beta\beta}\frac{\cos(E\nu)}{E^2}do\right]_{a\beta} + 4\pi\Phi_{\beta\beta},$$

so lässt sich die letzte Formel auch so schreiben:

$$2(1+2\pi\varkappa)\Phi_{\beta\beta} = \varkappa\left[\int(\Phi_{\alpha\beta}+\Phi_{\beta\beta})\frac{\cos(E\nu)}{E^2}do\right]_{a\beta} + (1+4\pi\varkappa)\Phi_{\beta\beta},$$

somit:

$$\text{e)}\qquad \Phi_{\beta\beta} = \varkappa\left[\int(\Phi_{\alpha\beta}+\Phi_{\beta\beta})\frac{\cos(E\nu)}{E^2}do\right]_{a\beta}.$$

Wir nehmen die Fläche β als überall konvex an, wir können daher auf das rechts stehende Integral den Satz II. des II. Abschnittes zur Anwendung bringen. Es folgt aus demselben, da wir hier:

$$\mu_\beta = \varkappa(\Phi_{\alpha\beta}+\Phi_{\beta\beta})$$

zu setzen haben:

$$\text{f)}\qquad \begin{aligned}&2\pi\varkappa\{\mathrm{Min}(\Phi_{\alpha\beta}+\Phi_{\beta\beta})-(\Phi_{\alpha\beta}+\Phi_{\beta\beta})\} < \Phi_{\beta\beta}\\ &\overline{\overline{<}}\, 2\pi\varkappa\{\mathrm{Max}(\Phi_{\alpha\beta}+\Phi_{\beta\beta})-(\Phi_{\alpha\beta}+\Phi_{\beta\beta})\}.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\mathrm{Min}(\Phi_{\alpha\beta}+\Phi_{\beta\beta}) \overline{\overline{>}} \mathrm{Min}\,\Phi_{\alpha\beta}+\mathrm{Min}\Phi_{\beta\beta},\quad \mathrm{Max}(\Phi_{\alpha\beta}+\Phi_{\beta\beta}) \overline{\overline{<}} \mathrm{Max}\Phi_{\alpha\beta}+\mathrm{Max}\Phi_{\beta\beta},$$

$$\mathrm{Min}\,\Phi_{\alpha\beta}-\Phi_{\alpha\beta} \overline{\overline{>}} -2L_\alpha\varkappa_\alpha^\beta,\qquad \mathrm{Max}\,\Phi_{\alpha\beta}-\Phi_{\alpha\beta} \overline{\overline{<}} 2L_\alpha\varkappa_\alpha^\beta,$$

somit können wir die vorangehende Ungleichung so schreiben:

$$2\pi\varkappa\{-2L_\alpha\varkappa_\alpha^\beta+\mathrm{Min}\,\Phi_{\beta\beta}-\Phi_{\beta\beta}\} \overline{\overline{<}} \Phi_{\beta\beta} < 2\pi\varkappa\{2L_\alpha\varkappa_\alpha^\beta+\mathrm{Max}\,\Phi_{\beta\beta}-\Phi_{\beta\beta}\}.$$

Hieraus folgt, wenn wir die Ungleichung links auf den Fall $\Phi_{\beta\beta} = \mathrm{Min}$, die Ungleichung rechts auf den Fall $\Phi_{\beta\beta} = \mathrm{Max}$ anwenden:

$$\text{g)}\qquad -4\pi\varkappa\cdot\varkappa_\alpha^\beta L_\alpha \overline{\overline{<}} \Phi_{\beta\beta} \overline{\overline{<}} +4\pi\varkappa\cdot\varkappa_\alpha^\beta L_\alpha.$$

IIa. (Definition.) Wir definieren als die magnetische Situationskonstante der Fläche α in Bezug auf die Fläche β die Grösse:

$$\text{2)}\qquad \lambda_\alpha^\beta = 4\pi\varkappa\cdot\varkappa_\alpha^\beta,$$

wo $\varkappa_\alpha^\beta$ die Situationskonstante der Fläche α in Bezug auf die Fläche β, $\varkappa$ die Magnetisierungskonstante des von der Fläche β begrenzten magnetischen Körpers vorstellt.

Wir können dann g) in der Form schreiben:

$$3) \qquad -L_\alpha\lambda_\alpha^\beta \overline{\overline{<}} \Phi_{\beta\beta} \overline{\overline{<}} + L_\alpha\lambda_\alpha^\beta$$

und den folgenden Satz aussprechen:

IIIa. Liegen die Werte einer Potentialfunktion Φ_α des Gebietes T_α an der Fläche α zwischen den Grenzen $(-L_\alpha)$ und $(+L_\alpha)$, wo $L_\alpha \overline{\overline{>}} 0$ ist, und bezeichnen Φ_β und $\overline{\Phi}_\beta$ resp. die Potentialfunktionen der Gebiete T_β und S_β, welche an der Fläche β der Bedingung genügen:

$$\left[\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial n} + (1+4\pi\varkappa)\frac{\partial\overline{\Phi}_\beta}{\partial\nu} + 4\pi\varkappa\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial\nu}\right]_\beta = 0, \text{ vgl. d. Anm. S. 23,}$$

$$\Phi_{\beta\beta} = \overline{\Phi}_{\beta\beta},$$

so liegen die gemeinsamen Werte, die diese beiden Potentialfunktionen an der Fläche β besitzen, zwischen den Grenzen:

$$(-L_\alpha\lambda_\alpha^\beta) \text{ und } (+L_\alpha\lambda_\alpha^\beta),$$

wo λ_α^β die durch 2) definierte magnetische Situationskonstante der Fläche α in Bezug auf die Fläche β vorstellt.

In genau derselben Weise ergiebt sich der Satz:

IIIa'. Liegen die Werte einer Potentialfunktion Φ_β des Gebietes T_β zwischen den Grenzen $(-L_\beta)$ und $(+L_\beta)$, wo $L_\beta \overline{\overline{>}} 0$ ist, und bezeichnen Φ_α und $\overline{\Phi}_\alpha$ resp. die Potentialfunktionen der Gebiete T_α und S_α, welche an der Fläche α den Bedingungen genügen:

$$\left[\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial n} + (1+4\pi\varkappa)\frac{\partial\overline{\Phi}_\alpha}{\partial\nu} + 4\pi\varkappa\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\nu}\right]_\alpha = 0, \text{ vgl. d. Anm. S. 23,}$$

$$\Phi_{\alpha\alpha} = \overline{\Phi}_{\alpha\alpha},$$

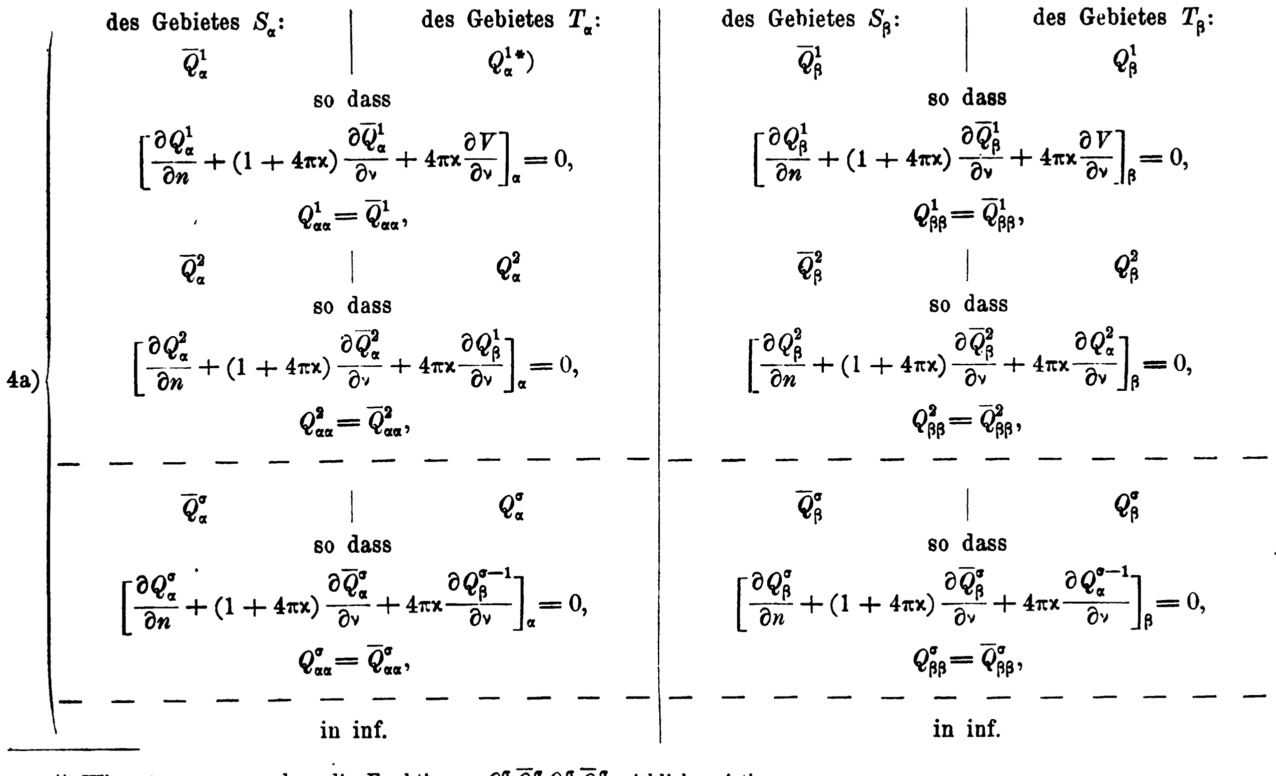
so liegen die gemeinsamen Werte, die diese beiden Potentialfunktionen an der Fläche α besitzen, zwischen den Grenzen:

$$(-L_\alpha\lambda_\alpha^\beta) \text{ und } (+L_\alpha\lambda_\alpha^\beta),$$

wo λ_β^α die magnetische Situationskonstante der Fläche β in Bezug auf die Fläche α vorstellt.

Aus den Sätzen IIa., IIIa., IIa'., IIIa'. ergiebt sich nun der Beweis einer kombinatorischen Methode, welche das Problem der magnetischen Induktion für den aus den beiden getrennten, von α und β begrenzten Stücken zusammengesetzten Körper unmittelbar löst, sobald das Problem der magnetischen Induktion für jedes einzelne der beiden Stücke seine Lösung gefunden hat. Die Methode lautet:

IVa. Man berechne successive die Potentialfunktionen:



4a)

des Gebietes S_α:	des Gebietes T_α:	des Gebietes S_β:	des Gebietes T_β:
$\overline{Q}_\alpha^1$	Q_α^1 *)	$\overline{Q}_\beta^1$	Q_β^1
so dass		so dass	
$\left[\frac{\partial Q_\alpha^1}{\partial n} + (1+4\pi\varkappa)\frac{\partial \overline{Q}_\alpha^1}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa\frac{\partial V}{\partial \nu}\right]_\alpha = 0,$		$\left[\frac{\partial Q_\beta^1}{\partial n} + (1+4\pi\varkappa)\frac{\partial \overline{Q}_\beta^1}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa\frac{\partial V}{\partial \nu}\right]_\beta = 0,$	
$Q_{\alpha\alpha}^1 = \overline{Q}_{\alpha\alpha}^1,$		$Q_{\beta\beta}^1 = \overline{Q}_{\beta\beta}^1,$	
$\overline{Q}_\alpha^2$	Q_α^2	$\overline{Q}_\beta^2$	Q_β^2
so dass		so dass	
$\left[\frac{\partial Q_\alpha^2}{\partial n} + (1+4\pi\varkappa)\frac{\partial \overline{Q}_\alpha^2}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa\frac{\partial Q_\beta^1}{\partial \nu}\right]_\alpha = 0,$		$\left[\frac{\partial Q_\beta^2}{\partial n} + (1+4\pi\varkappa)\frac{\partial \overline{Q}_\beta^2}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa\frac{\partial Q_\alpha^2}{\partial \nu}\right]_\beta = 0,$	
$Q_{\alpha\alpha}^2 = \overline{Q}_{\alpha\alpha}^2,$		$Q_{\beta\beta}^2 = \overline{Q}_{\beta\beta}^2,$	
— — —	— — —	— — —	— — —
$\overline{Q}_\alpha^\sigma$	Q_α^σ	$\overline{Q}_\beta^\sigma$	Q_β^σ
so dass		so dass	
$\left[\frac{\partial Q_\alpha^\sigma}{\partial n} + (1+4\pi\varkappa)\frac{\partial \overline{Q}_\alpha^\sigma}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa\frac{\partial Q_\beta^{\sigma-1}}{\partial \nu}\right]_\alpha = 0,$		$\left[\frac{\partial Q_\beta^\sigma}{\partial n} + (1+4\pi\varkappa)\frac{\partial \overline{Q}_\beta^\sigma}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa\frac{\partial Q_\alpha^{\sigma-1}}{\partial \nu}\right]_\beta = 0,$	
$Q_{\alpha\alpha}^\sigma = \overline{Q}_{\alpha\alpha}^\sigma,$		$Q_{\beta\beta}^\sigma = \overline{Q}_{\beta\beta}^\sigma,$	
— — —	— — —	— — —	— — —
in inf.		in inf.	

*) Wir setzen voraus, dass die Funktionen $Q_\alpha^\sigma\ \overline{Q}_\alpha^\sigma\ Q_\beta^\sigma\ \overline{Q}_\beta^\sigma$ wirklich existieren.

dann stellt die unbedingt konvergente Reihe:

$$4a') \qquad Q = \sum_0^\infty i (Q_\alpha^i + Q_\beta^i)$$

das durch das Potential V inducierte Potential des aus den beiden getrennten, von α und β begrenzten Stücken zusammengesetzten magnetischen Körpers dar, und zwar für das ausserhalb von α) und β) liegende Gebiet $T_{\alpha+\beta}$. Im Gebiete S_α ist dasselbe:

$$4a'') \qquad \overline{Q} = \sum_0^\infty i (\overline{Q}_\alpha^i + Q_\beta^i)$$

und im Gebiete S_β:

$$4a''') \qquad \overline{\overline{Q}} = \sum_0^\infty i (Q_\alpha^i + \overline{Q}_\beta^i).$$

Vorausgesetzt wird dabei, dass die Flächen α und β überall konvex und ihre beiden magnetischen Situationskonstanten echte Brüche sind*).

Beweis. Die Konvergenz der Reihen 4a'), 4a''), 4a''') folgt in genau derselben Weise aus den Sätzen IIIa. und IIIa'. dieses Abschnittes, wie die Konvergenz der im I. und II. Abschnitt mit 4a') bezeichneten Reihen, nur dass wir hier für $\varkappa_\alpha^\beta$ und $\varkappa_\beta^\alpha$ immer λ_α^β und λ_β^α zu schreiben haben.

Das durch 4a') definierte Q setzt sich additiv aus Potentialfunktionen des Gebietes T_α und T_β zusammen; nach den Sätzen Ia. und Ib. des I. Abschnittes folgt hieraus, dass Q eine Potentialfunktion des Gebietes $T_{\alpha+\beta}$ ist; in gleicher Weise folgt, dass das durch 4a'') dargestellte $\overline{Q}$ eine Potentialfunktion des Gebietes S_α, das durch 4a''') dargestellte $\overline{\overline{Q}}$ eine Potentialfunktion des Gebietes S_β darstellt.

Um den Satz IVa. nun vollständig zu beweisen, haben wir zu zeigen, dass die durch 4a'), 4a''), 4a''') dargestellten Funktionen Q, $\overline{Q}$, $\overline{\overline{Q}}$ den Bedingungen genügen:

---

*) Aus der Form des Beweises ist unmittelbar zu ersehen, dass der Satz auch gültig bleibt, wenn nur das Produkt der beiden magnetischen Situationskonstanten ein echter Bruch ist.

$$4a'''')\quad \begin{cases} \left[\frac{\partial Q}{\partial n} + (1+4\pi\varkappa)\frac{\partial \overline{Q}}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa\frac{\partial V}{\partial \nu}\right]_\alpha = 0, \\ \left[\frac{\partial Q}{\partial n} + (1+4\pi\varkappa)\frac{\partial \overline{\overline{Q}}}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa\frac{\partial V}{\partial \nu}\right]_\beta = 0, \\ Q_\alpha = \overline{Q}_\alpha, \\ Q_\beta = \overline{\overline{Q}}_\beta. \end{cases}$$

Von diesen Formeln sind nach 4a'), 4a''), 4a''') zunächst die beiden letzten wegen der Relationen:

$$Q^i_{\alpha\alpha} = \overline{Q}^i_{\alpha\alpha},$$
$$Q^i_{\beta\beta} = \overline{Q}^i_{\beta\beta}$$

evident; es handelt sich nur um den Beweis der ersten beiden Formeln. Es ist nach 4a):

$$\left[\frac{\partial Q^1_\alpha}{\partial n} + (1+4\pi\varkappa)\frac{\partial \overline{Q}^1_\alpha}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa\frac{\partial V}{\partial \nu}\right]_\alpha = 0,$$

$$\left[\frac{\partial Q^i_\alpha}{\partial n} + (1+4\pi\varkappa)\frac{\partial \overline{Q}^i_\alpha}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa\frac{\partial Q^{i-1}_\beta}{\partial \nu}\right]_\alpha = 0, \quad i = 1, 2 \ldots \infty$$

und es folgt durch Addition dieser Formeln:

$$\left[\frac{\partial \sum\limits_0^\infty i\, Q^i_\alpha}{\partial n} + (1+4\pi\varkappa)\frac{\partial \sum\limits_0^\infty i\, \overline{Q}^i_\alpha}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa\frac{\partial\left(V + \sum\limits_0^\infty i\, Q^i_\beta\right)}{\partial \nu}\right]_\alpha = 0.$$

Da $\left|\frac{\partial Q^i_\beta}{\partial n}\right|_\alpha = -\left|\frac{\partial Q^i_\beta}{\partial \nu}\right|_\alpha$, so ist:

$$\left[\frac{\partial \sum\limits_0^\infty i\, Q^i_\beta}{\partial n} + (1+4\pi\varkappa)\frac{\partial \sum\limits_0^\infty i\, \overline{Q}^i_\beta}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa\frac{\partial \sum\limits_0^\infty i\, Q^i_\beta}{\partial n}\right]_\alpha = 0.$$

Addieren wir diese Formel zu der vorstehenden, so ergiebt sich:

$$\left[\frac{\partial \sum\limits_0^\infty i\,(Q^i_\alpha + Q^i_\beta)}{\partial n} + (1+4\pi\varkappa)\frac{\partial \sum\limits_0^\infty i\,(\overline{Q}^i_\alpha + Q^i_\beta)}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa\frac{\partial V}{\partial \nu}\right]_\alpha = 0,$$

das ist nach 4a′) und 4a″) nichts anderes, als:

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial n} + (1 + 4\pi\varkappa)\frac{\partial \overline{Q}}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa\frac{\partial V}{\partial \nu}\right]_\alpha = 0.$$

In derselben Weise ergiebt sich die analoge Grenzbedingung an der Fläche β.

Damit ist der Satz IVa. vollständig bewiesen.

b) Der Fall, dass der magnetische Körper aus einem Stücke besteht, das von 2 überall konvexen Flächen αβ begrenzt wird, von denen die erstere von der letzteren umschlossen wird, ist im Ganzen dem Fall a) analog zu behandeln; wir werden mittelst Methoden, welche uns im Falle a) zu den Sätzen IIIa., IIIa′., IVa. führten, zu analogen Sätzen IIIb., IIIb′., IVb. gelangen, die uns in den Stand setzen, das Problem der magnetischen Induktion für den von α und β begrenzten Körper zu lösen, sobald die Lösung des Problemes für die beiden Fälle bekannt ist,

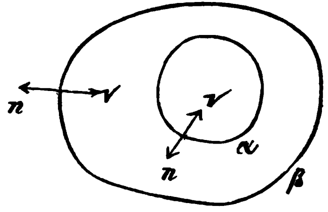


Fig. 13.

1. dass der Körper den Aussenraum von α ausfüllt,
2. „ „ „ „ Innenraum „ β „

Wir wollen die Beweise nicht wirklich durchführen, um nicht zu oft völlig analoge Betrachtungen zu wiederholen; das Hauptaugenmerk ist bei allen diesen Betrachtungen auf die scharfe Unterscheidung der inneren und äusseren Normalen und auf die korrekte Anwendung des Satzes II. des II. Abschnittes zu richten.

Wir führen zum Schlusse eine Ausdehnung der Methode IVa. auf den Fall an, dass der magnetische Körper aus n getrennten, von den überall konvexen Flächen $\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n$ begrenzten Stücken zusammengesetzt ist:

V. Es seien $\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n$ n geschlossene, von einander getrennte, überall konvexe Flächen, von denen keine von irgend einer der anderen umschlossen wird. Durch jede Fläche α_λ wird der Raum in 2 Gebiete zerlegt, in ein inneres S_{α_λ} und ein äusseres T_{α_λ}. Bezeichnet man mit V das Potential irgend welcher magnetischer Ursachen, und berechnet man successive die Potentialfunktionen: